Baccalauréat S 1999

L'intégrale de septembre 1998 à juin 1999

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Tapuscrit : Denis Vergès : Denis.Verges@wanadoo.fr

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1998

Exercice 1 **4 points**

Enseignement obligatoire

Un meuble est composé de 10 tiroirs T_1, $T_2, \dots,$ T_{10}.

Une personne place au hasard une boule dans un des tiroirs et une autre est chargée de *trouver le tiroir contenant la boule* à l'aide de la stratégie suivante :

la personne ouvre le tiroir T_1.

Si la boule est dans le tiroir T_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2, et ainsi de suite ... en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.

On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.

Pour i entier compris entre 1 et 10 ($1 \leqslant i \leqslant 10$), on appelle B_i l'évènement « La boule se trouve dans le tiroir T_i ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. **a.** Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 ($1 \leqslant i \leqslant 8$), l'évènement $(X = i)$ est l'évènement B_i.

   b. Justifier que l'évènement $(X = 9)$ est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.

   c. Déterminer la loi de probabilité de X.

   d. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** Résoudre l'équation

$$(\text{E}) \quad : \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \text{i}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure.

   Montrer que MNPQ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

   Placer ces points sur la figure.

   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{\text{PR}}$ et Z' de $\overrightarrow{\text{PS}}$ en fonction de α.

c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et que $\dfrac{Z}{Z'} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_2 = \sqrt{3}$ - i et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et de z_2 ; placer M et N sur la figure.

   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

   Placer ces points sur la figure.

   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{\text{PR}}$ et Z' de $\overrightarrow{\text{PS}}$ en fonction de α.

   c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\dfrac{Z}{Z'} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

⋆ **Étude d'une fonction auxiliaire**

La fonction d est définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$d(x) = \text{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) <$ e.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction f**

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle] - 1 ; + ∞ [par :

$$f(x) = x + 1 - \text{e}^{\frac{x}{x+1}}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \mathrm{e} + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

   Préciser la position relative de (D) et $(\mathscr{C})$.
2. **a.** Pour $x \in]-1\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

   Vérifier que $f''(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

   En déduire le sens de variations de f'.

   b. Dresser le tableau de variations de f'.

   (On admettra que $\displaystyle\lim_{x \to -1} f' = \lim_{x \to +\infty} f' = 1$.)
3. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $]-1\,;\,+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.

   Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Donner une valeur approchée de α au centième près.
4. **a.** Étudier les variations de f.

   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   c. Dresser le tableau de variations de f

Partie C

⋆ **Prolongement de la fonction *f*** en -1

On considère la fonction g définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(-1) & = & 0 \\ g(x) & = & f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{array}\right.$$

On appelle $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. **a.** Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}\right).$$

   b. Pour $x \in]-1\,;\,+\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$.

   c. En déduire que g est dérivable en - 1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.
2. Construire (D) et $(\mathscr{C}')$. Préciser les tangentes à $(\mathscr{C}')$ aux points d'abscisses -1, α, 0.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S France septembre 1998

Exercice 1 **4 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad I\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit (Q) le plan d'équation :

   $$x + y - 3z + 2 = 0$$

   et (Q′) le plan de repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

   a. Pourquoi (Q) et (Q′) sont-ils sécants ?

   b. Donner un point E et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q′).

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points J et K de coordonnées respectives :

   $$J\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad K\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

Exercice II **5 points**

1. On considère le polynôme P défini par :

   $$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

   a. Calculer P(4).

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : P$(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.

   Soient A,B, C les points d'affixes respectives :

   $$a = 4 \qquad b = 1 + i\sqrt{3} \qquad c = 1 - i\sqrt{3}$$

   a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a. Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.
b. Calculer l'affixe du point H.
c. Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Problème **11 points**

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

2. Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -\mathrm{e}$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\,x\mathrm{e}^{2x+1}.$$

a. Quel est, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$?
b. Étudier le sens de variation de de f.
c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
d. Dresser le tableau de variations de f.
e. On appelle $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Quelle est la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O ?
Écrire une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse (-1).
f. On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x.$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 1 + \mathrm{e}x\mathrm{e}^x.$$

a. Étudier le sens de variation de h.
En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Γ).

c. Tracer, sur le même graphique, les courbes T, $(\mathscr{C})$ et (Γ).

3. Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m.

a. Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M.

b. La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B.
Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.

c. Prouver que J appartient à $(\mathscr{C})$.

d. Tracer (D) et J pour $m = 0$.

Partie C

1. Soit x un réel quelconque. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathscr{A}(x)$, exprimée en cm^2, de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées $(u,\ v)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & \leqslant & u & \leqslant & 0 \\ 0 & \leqslant & v & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

3. Calculer $\mathscr{A}(-1)$.

4. $\mathscr{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?

Baccalauréat S Polynésie septembre 1998

Durée : 4 heures

Exercice 1 **5 points**

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

À tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1 - \text{i}\sqrt{3}}{2},\ z_3 = -1 - \text{i}\sqrt{3}.$$

b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3, z_2^3, z_3^3 des complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, de z_2^3 et de z_3^3.

2. **a.** Si $z = x + \text{i}y = \rho\text{e}^{\text{i}\theta}$ est un nombre complexe (avec , y et θ réels et ρ rel supérieur à zéro), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.

b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

c. Déterminer et tracer l'ensemble (E$'$) des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

Exercice 2 **5 points**

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, nous considérons les points A de coordonnées (0 ; 6 ; 0), B de coordonnées (0 ; 0 ; 8), C de coordonnées (4 ; 0 ; 8).

1. **a.** Réaliser la figure comportant les points définis dans l'exercice (unité graphique : 1 cm).

b. Démontrer que :

- les droites (BC) et (BA) sont orthogonales ;
- les droites (CO) et (OA) sont orthogonales ;
- la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).

c. Déterminer le volume, en cm^3, du tétraèdre OABC.

d. Démontrer que les quatre points O, A, B, C se trouvent sur une sphère dont vous déterminerez le centre et le rayon.

2. À tout réel k de l'intervalle ouvert $]0\,;\,8[$, est associé le point $M(0\ ;\ 0\ ;\ k)$.

Le plan (π) qui contient M et est orthogonal la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.

a. Déterminer la nature du quadrilatère $(MNPQ)$.

b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ? Pour quelle valeur de k, la droite (MP) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?

c. Déterminer MP^2 en fonction de k. Pour quelle valeur de k, la distance PM est-elle minimale ?

Problème **10 points**

L'objectif est d'étudier quelques propriétés de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

Variations de f et tracé de la courbe (F)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Dans le plan (P) muni du repre orthonormal $\left(\mathrm{O},\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm) la représentation graphique de la fonction f est note (F).

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de f : interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a.** Déterminer, suivant les valeurs de x de l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$, le signe de $x^2 - 2x - 1$ et celui de $f(x)$.

   b. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations ; préciser les valeurs exactes du minimum et du maximum.
3. Déterminer une équation de la tangente note (T) la courbe (F) au point A de (F) dont l'abscisse est 0.
4. **a.** Déterminer la valeur exacte et une valeur décimale approchée à 0,1 près de chacun des coefficients directeurs des tangentes à la courbe (F) en B(1 ; 0) et C(-1 ; 0).

   b. Tracer les trois tangentes à la courbe (F) en A, B(1 ; 0) et C(-1 ; 0) et la courbe (F).

Partie B

Intégrales et aires

Les surfaces S et $S_1(u)$ du plan (P), où u est un réel donné de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ sont définies par :

S est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$,

$S_1(u)$ est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant u$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.

Les aires respectives de ces surfaces sont notées $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1(u)$. Leurs valeurs exactes seront exprimées en unités d'aire.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où x est un réel positif.

   En procédant deux intégrations par parties successives, déterminer cette intégrale.
2. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.
3. Déterminer, en fonction de u où $u \geqslant 1$, l'aire $\mathcal{A}_1(u)$ puis la limite, lorsque u tend vers $+\infty$, de $\mathcal{A}_1(u)$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.
4. L'objectif est de déterminer le réel α supérieur ou égal à 1 pour lequel $\mathcal{A}_1(\alpha) = \mathcal{A}$.

   a. Démontrer que, sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, l'équation $\mathcal{A}_1(x) = \mathcal{A}$ est équivalente à : $x = 2\ln(1 + x)$.

b. Étudier le sens de variations de la fonction h définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = x - 2\ln(1 + x)$.

Démontrer que, sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, l'équation $x = 2\ln(1 + x)$ admet exactement une solution et que celle-ci, note α, vérifie la condition $2 < \alpha < 3$.

c. Déterminer, en indiquant la méthode utilisée, un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Déterminer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fonction rationnelle de α puis l'encadrement de $f(\alpha)$, que vous pouvez déduire du précédent, d'amplitude 2×10^{-4}.

∾ Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau ∾ octobre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes $(0 \leqslant n \leqslant 10)$. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a. R : « la boule tiree est rouge » ;
   b. B : « la boule tirée est blanche » ;
   c. V : « la boule tirée est verte ».
2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
   Le joueur tire une boule de l'urne
   - si elle est rouge, il gagne 16 F :
   - si elle est blanche, il perd 12 F ;
   - si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     – si celle boule est rouge, il gagne 8 F ;
     – si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
     – si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.
   Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).
   a. Déterminer les valeurs prises par X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Montrer que l'espérance mathématique de X est $12+16\dfrac{n}{(n+7)^2}$.
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x+7)^2}$.
   Étudier les variations de f.
4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique X est maximale. Calculer celle valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

EXERCICE 2 **5 points**

On considère les intégrales $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :
   $$\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\cos x\left(\cos x-\cos x\sin^2 x\right)\mathrm{d}x.$$
   b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$\mathrm{I}=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\mathrm{J}.$$
   c. Montrer de même que $\mathrm{J}=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\mathrm{I}$.
2. **a.** Montrer que $\mathrm{I}+\mathrm{J}=\dfrac{3\pi}{4}$.

b. Montrer que $\mathrm{J} - \mathrm{I} = 0$

c. En déduire les intégrales I et J.

Problème **11 points**

Partie A : Étude d'une fonction

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(3\mathrm{e}^{x} - x - 4\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

Il semblerait, d'après la représentation graphique de h tracée par ordinateur et donnée ci-après, que l'équation $h(x) = 0$ admette une seule solution dans $\mathbb{R}$. On se propose, dans cette partie, d'étudier la fonction h et d'examiner si le tracé fourni par l'ordinateur donne une information fiable.

1. Déterminer la limite de h en $-\infty$ (on pourra poser $X = 3x$).

2. Déterminer la limite de h en $+\infty$;
(on observera que $3\mathrm{e}^{x} - x - 4 = \left(3 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{4}{\mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{e}^{x}$).

3. On note h' la dérivée de h. Montrer que $h'(x) = \left(12\mathrm{e}^{x} - 3x - 13\right)\mathrm{e}^{3x}$.

4. Étude d'une fonction auxiliaire. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$k(x) = 12\mathrm{e}^{x} - 3x - 13$.

a. On note k' la fonction dérivée de la fonction k. Étudier le signe de k' sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de k en $+\infty$.

c. Déterminer la limite de k en $-\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction k.

5. Étude des variations de la fonction h.

a. Montrer qu'il existe un nombre réel négatif α et un seul tel que $k(\alpha) = 0$ et vérifier que $-4,3 < \alpha < -4,2$.
On admet que l'on peut établir qu'il existe un nombre réel positif β et un seul tel que $k(\beta) = 0$ et que $0,1 < \beta < 0,2$.

b. En déduire le signe de k sur $\mathbb{R}$ puis le sens de variations de la fonction h.

c. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm représente 0,1 sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 sur l'axe des ordonnées). Représenter graphiquement la fonction h sur l'intervalle $[-5\ ;\ -3,9]$.

6. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique b dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.
Donner un encadrement de b à 10^{-1} près.

Partie B : Approximation de l'une des solutions de l'équation $h(x) = 0$

On admet qu'il existe un nombre réel a et un seul dans l'intervalle $\mathrm{I} = [0\ ;\ 1]$ tel que $h(a) = 0$.

1. Justifier que, dans l'intervalle I, l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $3\mathrm{e}^{x} - x - 4 = 0$ puis à l'équation $x = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.

2. On considère la fonction φ définie sur l'intervalle I par $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.

a. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\varphi(x) \in \mathrm{I}$.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

c. Calculer $\varphi(a)$.

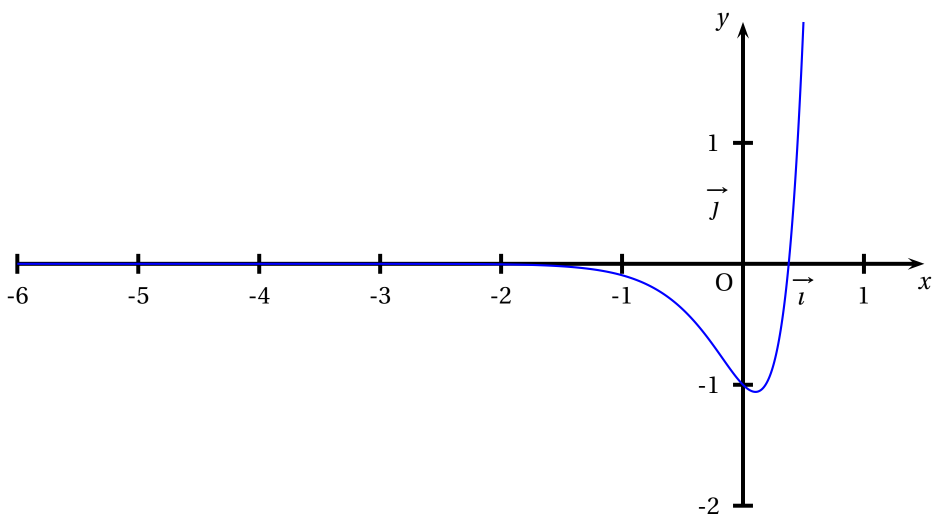
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - a|$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.

d. Déterminer un nombre entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de a à 10^{-4} près.
Donner une valeur approchée de u_p à 10^{-4}.



Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1998

Exercice 1 **4 points**

Le plan est rapporté au repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ orthonormal direct ; unité graphique 2 centimètres.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe 2i.

On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \text{i}z$.

1. **a.** Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
   b. Déterminer l'affixe du point A$'$, image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+\text{i}$.
   c. Montrer que les points A, I et A$'$ sont alignés.
2. **a.** Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1+\text{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.
   b. Vérifier que le point A appartient à (Γ).
   c. Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).
3. Soit B le point d'affixe $2+2\text{i}$ et B$'$ l'image de B par f.
   a. Démontrer que les droites (AB) et (A$'$B$'$) sont perpendiculaires.
   b. Soit C le point d'intersection des droites (AB) et (A$'$B$'$). Déterminer la nature du quadrilatère OACA$'$.

Exercice 2 **5 points**

Dans le plan (P), on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que AH = BC = 4. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G, barycentre du système de points pondérés $\{(\text{A}\,;\,2) ; (\text{B}\,;\,1) ; (\text{C}\,;\,1)\}$.
2. On désigne le point M un point quelconque de (P).
   a. Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}$ est un vecteur dont la norme est 8.
   b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que
   $$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = \left\|\vec{V}\right\|$$
3. On considère le système de points pondérés $\{(\text{A}\,;\,2) ; (\text{B}\,;\,n) ; (\text{C}\,;\,n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
   a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2.
   b. Montrer que le point G_n appartient au segment [AH].
   c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.
   Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.
   d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que
   $$\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} + n\overrightarrow{M\text{B}} + n\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = n\left\|\vec{V}\right\|.$$
   Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A.
   En préciser le centre et le rayon, noté R_n.

e. Construire E_2.

Exercice 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm.
On considère les points A(1 ; 0), C(0 ; 1), D(0 ; −1) et le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit M un point du cercle (Γ), d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de C.
La droite (DM) rencontre l'axe des abscisses au point I.
Le point N est le point d'intersection de la droite (OM) et de la parallèle à la droite (CD) passant par I.

1. Réaliser la figure.

2. On note t une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$.
On se propose de déterminer l'ensemble (F) décrit par le point N lorsque t décrit l'intervalle $[0 ; \pi]$ privé de $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t.

b. Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{\cos t}{1+\sin t} ; 0\right)$ puis que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de N sont :

$$x(t) = \frac{\cos t}{1+\sin t} \qquad y(t) = \frac{\sin t}{1+\sin t}$$

3. a. Comparer d'une part $x(t)$ et $x(\pi - t)$, puis d'autre part $y(t)$ et $y(\pi - t)$.
En déduire une propriété géométrique de l'ensemble (F).

b. Faire l'étude conjointe des variations des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

c. Déterminer les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$.

4. a. Calculer, en fonction de t, la distance ON puis la distance de N à la droite d'équation $y = 1$.

b. En déduire que (F) est inclus dans une conique dont on précisera la nature et les éléments.

c. Tracer l'ensemble (F).

Problème **11 points**

Partie A

⋆ **Résolution d'une équation différentielle**

(Hors programme depuis 1998.)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$.

2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.
Vérifier que le polynôme h défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E), c'est-à-dire que, pour tout x de $\mathbb{R}$,
$h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$.

3. a. Montrer que si f est solution de (E), c'est-à-dire, si pour tout x réel, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$, alors la fonction g, telle que $g = f - h$, est solution de (E_0).

b. Réciproquement, montrer que si g est solution de (E_0) alors la fonction f, telle que $f = g + h$, est solution de (E).

c. En déduire la forme générale des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire une solution φ de (E) satisfaisant à $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$.

Partie B

⋆ **Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = x^2 - 2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)}.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra montrer que

$$f(x) = \mathrm{e}\left(\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} - \frac{2x}{\mathrm{e}} + \frac{2}{\mathrm{e}}\right).$$

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   c. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique. On note α cette solution.

   b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]\,1{,}7\,;\,1{,}8[$.

3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.

   a. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (Γ).

   b. Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand x tend vers $-\infty$.

4. Tracer sur une feuille de papier millimétré, la courbe $(\mathscr{C})$ et la parabole (Γ).

Partie C

⋆ **Calculs d'aires**

Soit a un nombre réel strictement inférieur à 1. On appelle D_a le domaine du plan limité par les courbes $(\mathscr{C})$ et (Γ) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

On note $\mathscr{A}(a)$ l'aire du domaine D_a, exprimée en unités d'aire.

1. Montrer que $\mathscr{A}(a) = 2(a-1)\mathrm{e}^{(a-1)} - 2\mathrm{e}^{(a-1)} + 2$.
   (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Calculer l'aire $\mathscr{A}(0)$ du domaine D.
3. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $-\infty$.

Partie D

⋆ **Calcul de probabilités**

Sur la feuille de papier millimétré de la partie B, on place les points I(1 ; 0), J(0 ; 1) et K(1 ; 1). On utilise cette feuille comme cible.

On admet que, pour chaque essai :

• la probabilité d'atteindre un point du carré OIKJ est égale à $\frac{1}{2}$. ;

• sachant qu'un point du carré est atteint, la probabilité que ce point appartienne à D_0 est égale à A(0).

1. Pour un essai, montrer que la probabilité d'atteindre un point du domaine D_0 est égale à $1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.
2. On effectue n essais (n entier naturel non nul), tous indépendants les uns des autres.

   a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n d'atteindre au moins une fois un point du domaine D_0 au cours de ces n essais.

   b. Déterminer le nombre minimal n d'essais pour que cette probabilité p_n soit supérieure ou égale à 0,99.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1998

Exercice
Commun à tous les candidats
Dans une foire, une publicité annonce : « Un billet sur deux est gagnant. Achetez deux billets ».
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.

Partie A
Il est mis en vente chaque jour cent billets.

1. Xavier acheté deux billets. Calculer la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant.
   Le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible, puis à 10^{-3} près.
2. Xavier revient chaque jour, pendant trois tours, acheter deux billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant sur les trois jours ?
   Le résultat sera donné à 10^{-3} près.
3. Un autre tour, Xavier achète six billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant Le resultat sera donné à 10^{-3} près.

Partie B
Soit n un entier naturel non nul.
Désormais, il est mis en vente $2n$ billets. Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n, qu'il achète au moins un billet gagnant est $p_n = \dfrac{2n-1}{2(2n-1)}$.
2. **a.** Étudier les variations de la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Déterminer la limite de p_n, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice **(spécialité)**
Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm).
On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C te point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI].
Placer ces points sur une figure.

1. On considère la transformation s de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que

$$z' = -\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}.$$

   a. Démontrer que s est une similitude dont le centre Ω a pour affixe $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\text{i}$ et dont on déterminera le rapport k et une mesure θ de l'angle.
   b. Determiner les images par s des points O, A, B, C.

2. **a.** Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\text{B}}, \overrightarrow{\Omega\text{B}}\right)$.
   En déduire que les points A, B et Ω sont alignés.

b. Démontrer de même que les points I, C, Ω sont alignés.

c. En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure.

3. **a.** Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [BC] et [AI].

b. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{J}\Omega}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ sont colinéaires.

c. Demontrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2.
Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 3 cm). On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right).$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Justifier que, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 2 > 0$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer les limites de f en $+\infty$, et en $-\infty$.

4. Représenter $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$; on montrera que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{C})$ et on placera les points d'abscisses 0 et 2 ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Partie B

On s'intéresse à l'intersection de $(\mathscr{C})$ et de (Δ).
On pose, pour tout réel x, $\varphi(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la fonction dérivée φ' de φ. En déduire que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

2. **a.** Determiner la limite de φ en $-\infty$.

b. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$\varphi(x) = x\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x} - 1\right].$$

En déduire la limite de φ en $+\infty$.

3. Montrer que la droite (Δ) coupe la courbe $(\mathscr{C})$ en un point et un seul.
On désigne par α l'abscisse de ce point.
Montrer que $0,3 < \alpha < 0,4$.

Baccalauréat S Pondichéry mai 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les questions 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
   On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.
2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.
   b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+\text{i})$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-\text{i})$ et le point A d'affixe $z_\text{A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.
   b. Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   c. Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   d. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.
   e. Soient I le milieu du segment $[\text{M}_3\text{M}_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

Exercice 2 **4 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On admet que 1 999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a~;~b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1 999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1 999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41
43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

Exercice 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un triangle ABC du plan.

1. **a.** Déterminer et construire le point G, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ -1)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ 1)].$$

   b. Déterminer et construire le point G′, barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ 1)\ ;\ (\mathrm{B}\ ;\ 5)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ -2)].$$

2. **a.** Soit J le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{GG'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JG'}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et en déduire l'intersection des droites (GG′) et (AB).

   b. Montrer que le barycentre I de [(B ; 2) ; (C ; - 1)] appartient à (GG′).

   c. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de [CD] et K le milieu de [GA].

3. Déterminer trois réels a, d et c tels que K soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a)\ ;\ (\mathrm{D}\ ;\ d)\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c)].$$

4. Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC).
   Déterminer les réels a' et c' tels que X soit barycentre de

$$[(\mathrm{A}\ ;\ a')\ ;\ (\mathrm{C}\ ;\ c')].$$

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Soit la fonction numérique f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

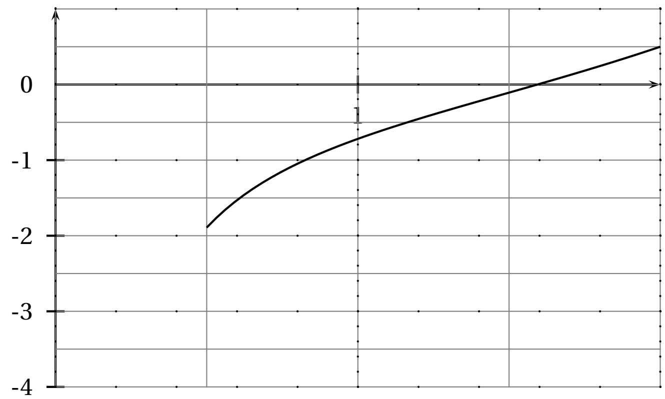
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}.$$

Partie A

Recherche graphique d'un extremum

L'observation de la courbe représentative de la fonction f sur l'écran graphique d'une calculatrice donne à penser que f admet un minimum sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 2]$. On se propose d'en donner une valeur approchée.

Observer ci-dessous la représentation graphique de la fonction f', dérivée de f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 2]$.



Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur $[0,5\,;\,2]$?
À l'aide de ce graphique, donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum.

Partie B
Étude de la fonction F
On considère la fonction h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2$.

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Déterminer le signe de $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

   En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$ tel que $h(a) = 0$.
   En déduire le signe de h sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. Étude de la fonction f
   - **a.** Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   - **b.** Montrer que, pour tout nombre x strictement positif,

     $$f'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + 2}{x^3}.$$

     En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.
   - **c.** Montrer que $f(a) = \dfrac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.

Partie C
Recherche d'un encadrement du nombre a

1. Démontrer que, sur $[0\,;\,+\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à

   $$2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right) = x.$$
2. Soit la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

   $$g(x) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right).$$

   On pose $\mathrm{I} = \left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite $(x_n)_{n>1}$ définie par

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \dfrac{3}{2} \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.$$

   On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, x_n appartient à I.

4. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$|x_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - a|$$

$$\text{et} \quad |x_n - a| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

En déduire que la suite (x_n) converge vers a.

5. Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a. Donner une valeur approchée de x_p avec trois décimales.

Partie D
Quelques propriétés d'une primitive de f
On appelle F la primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1. Ainsi l'on a, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier le sens de variation de F sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout x supérieur ou égal à 2,

$$\int_2^x f(2)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par comparaison de limites, et en utilisant la relation de Chasles, en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 1999

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie I
Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers. On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2. Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3. Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4. Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II
On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2. Déterminer les entiers n tels que p_n soit supérieur ou égal à $0,95$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité
Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$;
$a_1 = \text{e}^{\frac{i\pi}{12}}$.
Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

1. **a.** Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.
   b. Soit I le milieu du segment $[\text{A}_0\text{A}_2]$. Calculer l' affixe du point I.
   c. Faire une figure.
2. **a.** Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.
   b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.
   c. Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité
Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I
Soit $E = \{1~;~2~;~3~;~4~;~5~;~6~;~7~;~8~;~9~;~10\}$. Déterminer les paires $\{a~;~b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?

3. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
5. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p-1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty~;~1[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, l'unité graphique étant 2 cm.

Partie I

1. **a.** Soit $X = \dfrac{2}{x-1}$.

   Prouver l'égalité : $\dfrac{2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}X^2\mathrm{e}^X$.

   En déduire la limite de f quand x tend vers 1.

   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   c. En déduire une asymptote à la courbe Γ.
2. **a.** Soit v la fonction numérique définie sur $]-\infty~;~1[$ par :

   $$v(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

   Calculer $v'(x)$.

   b. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x-1)^4}\mathrm{e}^{\frac{x+1}{x-1}}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Tracer la courbe (Γ).

Partie II

1. Déterminer une primitive de f sur $]-\infty~;~1[$.
2. Soit α réel tel que $0 < \alpha < 1$, déterminer :

   $$g(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Quelle est la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1 ?
4. Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\alpha$ et $x = \alpha$?

Partie III

1. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ a deux solutions dont l'une est - 1.

   On notera β l'autre solution.

   b. Donner un encadrement de largeur 10^{-2} de β.
2. Soit a un élément de $]-\infty~;~1[$.

   Déterminer graphiquement, en fonction de a, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$.

Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1999 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est utilisé.

On s'intéresse à cinq questions de ce Q.C.M. supposées indépendantes. À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte.

Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;

B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq ».

b. On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note - 1 à toute réponse incorrecte.

Calculer la probabilité de l'évènement C : « Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions ».

2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions. Quelle est alors la probabilité de l'évènement C décrit au **1 b** ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$, le point M d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.

2. Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.

Tracer cet ensemble sur la figure précédente.

3. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.

4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?

Démontrer que le nombre $\dfrac{1 + z + z^2}{z}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.

Conclure sur la conjecture précédente.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne le point A(12 ; 18).

On désigne par B un point de l'axe $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\right)$ et par C un point de l'axe $\left(\text{O} ; \vec{\jmath}\right)$ tels que $\left(\overrightarrow{\text{A}B}, \overrightarrow{\text{A}C}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation :

$$\text{(E)}\ \ 2x + 3y = 78.$$

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

   a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

   b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

   c. Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k ; 18 - 2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

   d. Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leqslant x \leqslant 21 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 14\ ?$$

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1).$$

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0,72 ; -0,71]$.
3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $-1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $]-1; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}.$$

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition

   a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Sens de variation de g

a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.

3. Tableau de variations et représentation graphique de g

a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

4. Calcul d'aire

Soit a un réel strictement supérieur à 0. On pose :

$$I(a) = \int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. Donner, suivant les valeurs de a, une interprétation géométrique du réel $I(a)$.

b. En remarquant que, pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c. Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$ et $\lim\limits_{a\to 0} I(a)$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Asie juin 1999

Exercice 1 **4 points**

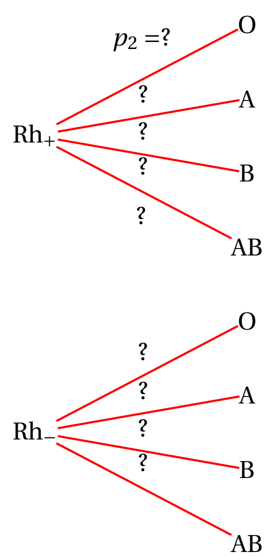
Commun à tous les candidats

Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :

	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus -	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à trois décimales.

1. L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).

On note Rh+ l'évènement « La personne a le facteur Rh+ ».

On note O l'évènement « La personne appartient au groupe O ».

a. Déterminer la probabilité p_1 c'est-à-dire p(Rh+).

On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbre.

Déterminer de même la probabilité p_2 (en détaillant les calculs).

b. Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs).

2. **a.** Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ?

Vérifier ce résultat à partir du tableau.

b. Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

3. a. On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).
Calculer, en fonction de n, la probabilité p pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.
b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p \geqslant 0,999$.

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Pour tout nombre Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.
   a. Factoriser $P(Z)$.
   b. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z.
   c. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. a. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (l'unité graphique est 5 cm).
Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2,\ b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i} \text{ et } c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}$$

   b. Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.
3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.
Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}.$$

En déduire le rapport $\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CD}}$.
Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   a. Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b. Résoudre l'équation (E).
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2. \end{cases}$
   a. Montrer que le couple $(a\ ;\ b)$ est solution de (E).
   b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3. a. Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIII^{e} siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

L'objet de ce problème est de résoudre une équation différentielle, d'en étudier une fonction solution et de calculer des aires.

Partie A

Résolution de l' équation différentielle (E) : $y' + y = x - 1$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t(t-1)\,\mathrm{d}t$.
2. Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On pose $f(x) = z(x)\mathrm{e}^{-\,x}$.

   a. Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = \mathrm{e}^x(x-1)$.

   b. À l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant, pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = \mathrm{e}^x(x-1)$.

Partie B

Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \mathrm{e}^{1-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On désigne par $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de f.

1. **a.** Étudier le sens de variations de f

   b. Préciser $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. **a.** Montrer que la droite (D), d'équation $y = x-2$, est asymptote à la courbe $\left(C_f\right)$.

   b. Préciser la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à (D).
3. Tracer (D) et $\left(C_f\right)$.

Partie C

Calcul d'aires

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe (C_f) , son asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$.

   Exprimer, à l'aide de x_0 l'aire S_1 de ce domaine.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$, dont on trouvera la courbe représentative (C_g) en annexe. Donner une interprétation, en terme d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (C_g).
3. A est le point de coordonnées (x_0 ; 0).

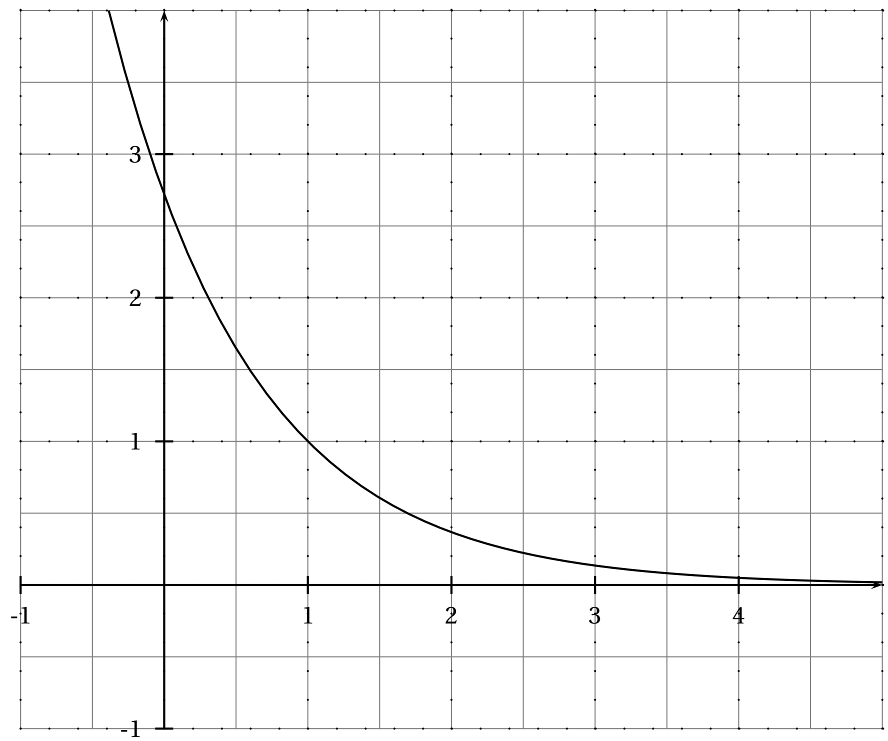
   B est le point de la courbe (C_g) d'abscisse x_0.

   Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0. C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées de C.
4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC.

   Vérifier que $\mathrm{S}_1 + 2\mathrm{S}_2 = 0$.

Annexe 1

Courbe représentative (C_g) *de la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = \text{e}^{1-x}$



Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Centres étrangers juin 1999 ∾

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne U_1 contient deux jetons numérotés 1 et 2.
   Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.
   On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).
   a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
   b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?
2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanment et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
   a. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
   b. Soit S la variable alatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de S.
   c. Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
   Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ, puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que $E(X)$ soit égale à 0).

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. **a.** Déterminer un couple $(x_0\ ;\ y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :
   $$48x + 35y = 1.$$
   (On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).
   b. Déduire de **a.** tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de cette équation.
2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (48 ; 35 ; 24) et le point A de coordonnées $(-11\ ;\ 35\ ;\ -13)$.
   a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l' ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{AM}} = 0$.
   b. Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$.
   Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100\ ;\ 100]$.
   En déduire les coordonnées du point de (D), coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, A, A′, B, B′ sont les points d'affixes respectives $1,\ -1,\ \text{i},\ -\text{i}$.

À tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A′, B et B′, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec

$$\left(\overrightarrow{M_1\text{B}}, \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2\text{A}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Voir la figure sur l'annexe 1, *qui sera complétée et rendue avec la copie*

1. **a.** Justifier les égalités $z - z_1 = \text{i}(\text{i} - z_1)$ et $1 - z_2 = \text{i}(z - z_2)$.

   b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+\text{i}}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-\text{i}}{2}(z+i).$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

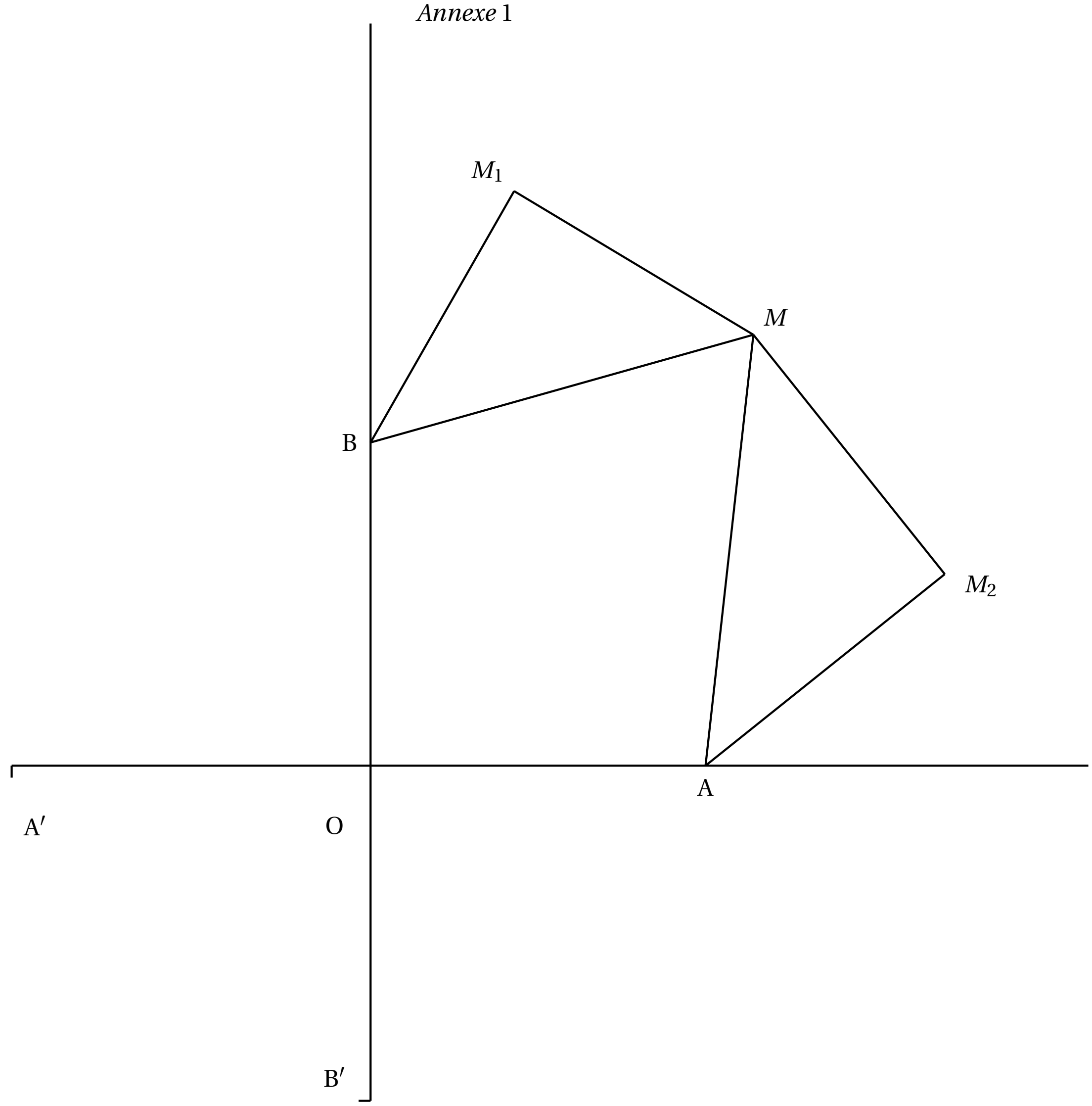
   a. Montrer que : OM_1 = OM_2 équivaut à $|z+1| = |z+\text{i}|$.
   En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que OM_1 = OM_2 et tracer (Δ) sur la figure.

   b. Montrer que : OM_1 = M_1M_2 équivaut $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

   c. En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels OM_1 = M_1M_2.
   On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.
   Tracer (Γ) sur la figure.

   d. En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

Annexe 1



Problème **10 points**

Commun à tous les candidats

Le but du problème est l'étude d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et d'une primitive de f.

Première partie

Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2+1)\ln(x^2+1).$$

1. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et en détaillant les calculs effectués, montrer que

$$g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2+1).$$

2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α, dans l'intervalle $\left[\sqrt{\mathrm{e}-1}~,~\sqrt{\mathrm{e}^2-1}\right]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale 10^{-2} près par défaut de α.

4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

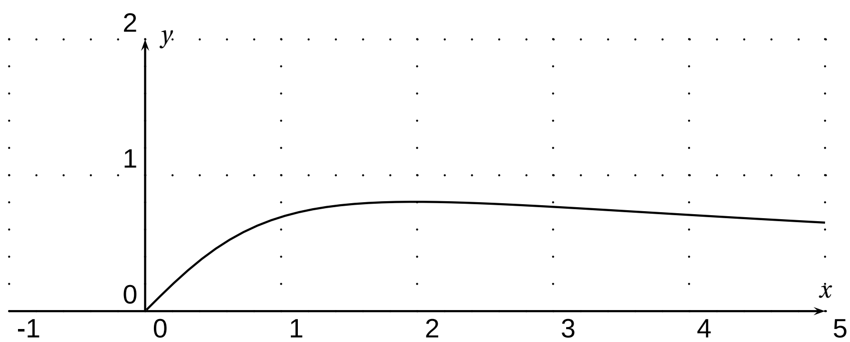
Deuxième partie
Étude de la fonction f
La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative $(\mathscr{C})$, dans le plan rapporté à un repère d'origine O, est donnée en *annexe* 2, qui sera complétée et rendue avec la copie.

1. **a.** Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.
   En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
   b. Vérifier que, pour x strictement positif, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$
   Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **a.** Montrer que, pour $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$.
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Annexe 1



Troisième partie
Étude d'une primitive de f
On note F la primitive de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.
On rappelle que $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$: (on ne cherchera pas à calculer $F(x)$).

1. **a.** Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geqslant \dfrac{2\ln x}{x}$.
   b. Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{2\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.
2. Dresser le tableau des variations de F.
3. Montrer que $f(1) < F(2) < f(\alpha)$ et en déduire un encadrement de $F(2)$. (On prendra $f(\alpha) \approx 0,8$.)
4. On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$, A le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(1\ ;\ \ln 2)$ et B le point de coordonnées $(\ln 2\ ;\ \ln 2)$.
   a. Vérifier que B appartient la tangente $(\mathscr{C})$ en O.
   b. Placer les points I, A et B sur la figure de l'*annexe* 1 et tracer les segments [OA], [OB], [BA] et [AI].
   c. On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de [OA] et au-dessous de [OB] et de [BA].
   Déterminer un encadrement de $F(0)$, d'amplitude inférieure à 2×10^{-1}.

5. Tracer la représentation graphique (Γ) de F en exploitant au maximum les résultats précédents ; on précisera notamment la tangente (Γ) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. (Unité graphique : 2 cm)

Durée : 4 heures

Baccalauréat S France juin 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.

On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\dfrac{1}{2}z^2 - z$.

L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.

Soit t un réel de $[-\pi ; \pi]$ et m le point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}t}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) & = & \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{array}\right., \ t \in [-\pi ; \pi].$$

Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).

2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0 ; \pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0 ; \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0 ; \pi]$.
6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0 ; \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, n est un entier naturel *non nul*.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\text{e}^{\frac{t}{n}}\,\text{d}t.$$

1. **a.** Soit φ la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $\varphi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$.

Étudier les variations de φ sur $[0 ; 2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$,

$$\frac{3}{2} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{7}{4}.$$

b. Montrer que, pour tout réel t dans $[0 ; 2]$, on a

$$\frac{3}{2}\text{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \varphi(t)\text{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{7}{4}\text{e}^{\frac{t}{n}}.$$

c. Par intégration en déduire que :

$$\frac{3}{2}\,n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{7}{4}\,n\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}-1\right).$$

d. On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}\right)=1$.

Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors $3 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{7}{2}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a : $\dfrac{2t+3}{t+2}=2-\dfrac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,\mathrm{d}t$.

b. Montrer que, pour tout t dans $[0\,;2]$, on a $1 \leqslant \mathrm{e}^{\frac{t}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}$.

En déduire que $\mathrm{I} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{2}{n}}\mathrm{I}$.

c. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

Exercice 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4\times 10^n - 1,\ b_n = 2\times 10^n - 1 \text{ et } c_n = 2\times 10^n + 1.$$

1. **a.** Calculer $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\ b_3$ et c_3.

b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $b_n \times c_n = a_{2n}$.

En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

e. Montrer que PGCD $(b_n,\ c_n)$ = PGCD $(c_n,\ 2)$.

En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :

$$(1) \qquad b_3x + c_3y = 1$$

d'inconnues les entiers relatifs x et y.

a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2 ; 3 ; 5; 7 ; 11 ; 13 ; 17; 19; 23 ; 29 ; 31; 37; 41; 43; 47; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83; 89 ; 97.

Problème **10 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$: on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

Partie A

⋆ Étude d'une fonction f et de sa courbe représentative $\mathscr{C}$
On considère la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative relativement au repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.
   - **a.** Étudier les variations de u.
   - **b.** Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[2\,;3]$. Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.
   - **c.** Étudier le signe de $u(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. - **a.** Étudier les variations de f.
   - **b.** Exprimer $\ln\alpha$ comme polynôme en α.
     Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
     En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5. - **a.** Étudier le signe de $f(x)$.
   - **b.** Tracer $\mathscr{C}$.

Partie B
⋆ Étude d'une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
Soit F la primitive de f sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.
On appelle (Γ) la courbe représentative de F relativement aù repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. - **a.** Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de F sur $]0\,;+\infty[$.
   - **b.** Que peut-on dire des tangentes à (Γ) en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?
2. Calcul de $F(x)$.
   - **a.** x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ (on pourra faire une intégration par parties).
   - **b.** Montrer que, pour tout x strictement positif :
     $$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2.$$
   - **c.** En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.
3. - **a.** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x) = 0$. En déduire la limite de F en 0.
   - **b.** Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,
     $$F(x) = x\ln x\left(1 - \frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3.$$
     En déduire la limite de F en $+\infty$.
   - **c.** Dresser le tableau de variation de F.
   - **d.** Tracer (Γ) sur le même graphique que $(\mathscr{C})$.
4. Calcul d'une aire
   Calculer, en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.

Baccalauréat S Liban juin 1999

Exercice 1 **4 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixe $3+\text{i}$, $7-i$, $-1-7\text{i}$, $8-4\text{i}$ respectivement.

1. **a.** Placer les points A, B, C, D.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle.
   On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre I.
3. À tout point M d'affixe z, avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{10}{z}$.
   a. Écrire, sous forme algébrique les affixes a', b', c' des points A′, B′, C′ (respectivement associés à A, B, C). Placer les points A′, B′, C′.
   b. Vérifier que : $\dfrac{c'-a'}{b'-a'} = 2$.
   c. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.
   d. Que peut-on en déduire pour les points A′, B′, C′ ?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Sur une droite (D) muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives −4 et 3. Pour tout entier naturel n, on note

$$A_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\,;\,1),\ (B_n\,;\,4)\}$$

$$B_{n+1} \quad \text{le barycentre de} \quad \{(A_n\,;\,3),\ (B_n\,;\,2)\}$$

1. Placer les points A_0, B_0,A_1, B_1.
2. Les points A_n et B_n ont pour abscisses a_n et b_n respectivement.
   Ainsi, $a_0 = -4$ et $b_0 = 3$.
   Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$.
3. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n + 4b_n = 0$.
   b. En déduire que : $a_{n+1} = -\dfrac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\dfrac{2}{5}b_n$.
4. **a.** Exprimer a_n et b_n à l'aide de n.
   b. Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$.
   c. Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n+3$, $b = 5n+2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1$, $n = 11$, $n = 15$.
2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.
3. **a.** Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n+3 = 7k$.

b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n+2=7k$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
Pour quelles valeurs de r, d est-il égal à 1 ?

Problème **11 points**

Partie I

Soit a et b deux nombres réels. La fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. **a.** Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

b. Vérifier que, pour tout réel x : $\varphi(x)=-\varphi''(x)-2\varphi'(x)$.

2. Démontrer que φ admet une primitive Φ, définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(x)=(Ax+B)\,\mathrm{e}^{-x}$ où A et B sont des nombres réels que l'on exprimera à l'aide de a et b.

3. Déterminer a et b pour que : $\varphi(0)=5$ et $\varphi'(0)=-3$.
Donner alors $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ et $\Phi(x)$.

Partie II

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 1 cm sur l'axe des ordonnées.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x)=(2x+5)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Donner une interprétation graphique de cette deuxième limite.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec les axes du repère.

3. Calculer $f'(x)$, déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f.

4. Soit I le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.
Une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point I est $y=g(x)$.
Déterminer $g(x)$.

5. On pose $d(x)=f(x)-g(x)$.

a. Étudier le sens de variation de d', calculer $d'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d'.

b. Étudier le sens de variations de d, calculer $d\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et donner le signe de d.

c. Donner la position de la tangente (T) par rapport à la courbe $(\mathscr{C})$.

6. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (T).

7. Soit α un réel strictement positif. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x=-\dfrac{5}{2}$ et $x=\alpha$.
Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$. (On peut éventuellement utiliser le résultat de la **partie I.**)
Déterminer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Baccalauréat S La Réunion juillet 1999

Exercice **5 points**

On dispose d'un cube en bois de 3 cm d'arête, peint en bleu. On le découpe, parallèlement aux faces, en 27 cubes de 1 cm d'arête. On place ces 27 cubes dans un sac.

Partie A

On tire au hasard l'un des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes sur le cube tiré.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Partie B

On tire maintenant, au hasard, simultanément deux des 27 cubes du sac. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Montrer que la probabilité d'avoir, au total, six faces peintes est égale à $\dfrac{28}{351}$.
2. On désigne par n un nombre entier naturel non nul ; après avoir noté le nombre de faces coloriées sur les deux premiers cubes tirés, on les remet dans le sac et on recommence l'opération de manière à effectuer n tirages successifs et indépendants de deux cubes.
   - **a.** Calculer la probabilité p_n pour que l'on obtienne, au total, $6n$ faces peintes.
   - **b.** Déterminer la plus petite valeur de n pour que p_n soit inférieurà 10^{-12}.
     Les résultats des calculs de probabilités seront donnés sous forme fractionnaire.

Exercice de spécialité **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonorrnal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On considère l'application f qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{\overline{z}}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

On désigne par A et O les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et i.

1. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A et de rayon 1, privé de O.
   - **a.** Pour tout nombre complexe z non nul, démontrer que :

     $$\left|z' + \text{i}\right| = \left|z'\right| \quad \text{équivaut à} \quad |z + \text{i}| = 1.$$

   - **b.** En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_1'$, image de $\mathscr{C}_1$ par f.
   - **c.** Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1'$ sur une même figure.
2. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   - **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z non nul,
     $\left|z' - \text{i}\right|^2 = 2$ équivaut à $|z + \text{i}|^2 = 2$ (on pourra utiliser $|Z^2| = Z\overline{Z}$).
   - **b.** En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_2'$ image de $\mathscr{C}_2$ par f.

c. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}'_2$ sur la figure précédente.

3. **a.** Donner l'écriture complexe de la similitude directe σ de centre Ω d' affixe $1+\text{i}$ de rapport 2, et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Montrer que $\sigma \circ f$ est l'application qui, à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M'' d'affixe z'' telle que

$$z" = \frac{2\text{i}+(3-\text{i})\overline{z}}{\overline{z}}.$$

c. À l'aide des questions précédentes, déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2, images respectives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ par $\sigma \circ f$.

d. Tracer tes ensembles Γ_1 et Γ_2 sur la figure précédente.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormat direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).

On considère la courbe paramétrée (Γ), ensemble des points $M(t)$ dont les coordonnées $(x(t),\ y(t))$ sont définies, pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 5\cos t\\ y(t) & = & 3\sin t \end{array}\right.$$

Partie 1 On se propose, dans cette partie, de tracer la courbe (Γ).

1. Recherche d'un intervalle d'étude.

a. Par quelle transformation géométrique le point $M(-t)$ est-il l'image du point $M(t)$ de (Γ) ?

b. Par quelle transformation géométrique le point $M(\pi-t)$ est-il l'image du point $M(t)$ de (Γ) ?

c. Expliquer comment, pour tracer ta courbe (Γ), on peut limiter l'étude à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Tracé de (Γ).

a. étudier le sens de variation de chacune des fonctions x et y sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Tracer la courbe (Γ) avec ses tangentes aux points $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Propriété géométrique liée à la courbe (Γ)

Soient F et F$'$ les points d'affixes respectives 4 et -4.

Le point M, de paramètre t, appartenant à la courbe (Γ), on note $z = x(t)+\text{i}y(t)$ son affixe. Soit $\overrightarrow{W}$ le vecteur d'affixe $w = -5\sin t + 3\text{i}\sin t$.

1. Démontrer que $16 - z^2 = w^2$.

2. En déduire que $\left(\overrightarrow{M\text{F}}, \overrightarrow{W}\right) = \left(\overrightarrow{W}, \overrightarrow{\text{F}'M}\right)$ modulo 2π.

3. Comment la propriété précédente permet-elle de construire la tangente en tout point de la courbe? Réaliser cette construction pour le point de paramètre $\frac{\pi}{3}$.

Problème **5 points**

L'objet du problème est d'étudier une fonction f puis d'examiner des intégrales qui en sont issues.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité graphique 3 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right);$$

on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ on a :

   $$f(x) = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right).$$

   c. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation $y = x$.

   d. étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (Δ).

2. étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Tracer la droite (Δ) et la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ on pose

$$F(x) = \int_0^x \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question **1** de la partie A, donner une interprétation géométrique de $F(x)$.
2. étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Soit a un réer strictement positif.

   a. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1~;~1+a]$, on a

   $$\frac{1}{1+a} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1.$$

   b. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonc tien logarithme, établir que $\dfrac{a}{1+a} \leqslant \ln(1+a) \leqslant a$.

4. Soit x un réel strictement positif.

   Déduire de la question **3** :

   $$\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

   puis $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

5. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté ℓ.

   Établir que $\dfrac{1}{2}\ln 2 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

6. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t$.

   (On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h, définie sur $[0~:~+\infty[$ par $h(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2t}\right)$).

   b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

   a. Exprimer S_n à l'aide de F et n.

   b. La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner sa limite.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Polynésie juin 1999

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une blanche ».

1. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».

   b. Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient exactement une boule blanche ».

   c. En déduire que les probabilités $p(A\cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :

$$p(A\cap B)=\frac{n}{2^n},\quad p(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}},\quad p(B)=\frac{n+1}{2^n}.$$

2. Montrer que $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$ si, et seulement si,

$$2^{n-1}=n+1.$$

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier naturel supérieur ou égal à deux par

$$u_n=2^{n-1}-(n+1).$$

   Calculer $u_2,\ u_3,\ u_4$.

   Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

Exercice 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)\ :\ z^3-8=0$.

2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}}=-1+\text{i}\sqrt{3},\quad z_{\text{B}}=2\quad\text{et}\quad z_{\text{C}}=-1-\text{i}\sqrt{3}.$$

   a. Écrire z_{A} et z_{C} sous la forme trigonométrique.

   b. Placer les points A, B et C.

   c. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=\text{e}^{2i\frac{\pi}{3}}z.$$

   a. Caractériser géométriquement l'application f.

b. Déterminer les images des points A et C par f.
En déduire l'image de la droite (AC) par f.

Exercice 2 — **4 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.
3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier

$$A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}.$$

   a. Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p, par 7 ?
   b. Démontrer que si $p = 3n+1$ alors A_p est divisible par 7.
   c. Étudier le cas où $p = 3n+2$.
4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1001001000} \quad b = \overline{1000100010000}.$$

   Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p.
   Sont-ils divisibles par 7 ?

Problème — **11 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - e^{2x-2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On prendra 5 cm comme unité.

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Vérifier que, pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\dfrac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$.
2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et (D).
4. On note A le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe $(\mathscr{C})$.
5. **a.** On note I l'intervalle [0 ; 0,5].
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.
   b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de a.
6. Construire la courbe $(\mathscr{C})$, l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B

Détermination d'une valeur approchée de a.

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \mathrm{e}^{2u_n-2} \end{array}\right.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x-2}$.
   Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$.
   En déduire $g(a)$.
2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a :

$$|g'(x)| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I.
4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}}|u_n - a|$.
5. Démontrer, par récurrence, que : $|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$.
6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
7. Déterminer un entier naturel p tel que : $\left|u_p - a\right| < 10^{-5}$.
8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près : on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice.