Baccalauréat S 2000

L'intégrale de septembre 1999 à juin 2000

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Antilles-Guyane septembre 1999 3

France septembre 1999 8

Sportifs de haut-niveau septembre 1999 11

Amérique du Sud novembre 1999 14

Nouvelle-Calédonie décembre 1999 17

Pondichéry avril 2000 20

Amérique du Nord juin 2000 23

Antilles-Guyane juin 2000 27

Asie juin 2000 31

Centres étrangers juin 2000 35

France juin 2000 39

La Réunion juin 2000 43

Liban juin 2000 46

Polynésie juin 2000 49

Tapuscrit : Denis Vergès : Denis.Verges@wanadoo.fr

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1999

EXERCICE 1 **4,5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

   a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

   b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit x un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 10$. On place maintenant x boules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne A et les $10 - x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B. On procède à l'expérience E :

   On tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.

   On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

   a. Pour cette question **a.**, on prend $x = 6$.
   Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à :

   $$\frac{1}{55}\left(-x^2 + 10x + 5\right).$$

   c. Pour quelles valeurs de x l'évènement M est-il plus probable que l'évènement contraire $\overline{\mathrm{M}}$?

EXERCICE 2 **5,5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Pour tout point P, on convient de noter z_P son affixe.

1. On considère dans l'ensemble des complexes l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$.

   a. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que $z^3 + 8 = (z+2)(az^2 + bz + c)$ pour tout complexe z.

   b. Résoudre l'équation (E) (on donnera les solutions sous la forme $x + y\mathrm{i}$, avec x et y réels).

   c. Écrire ces solutions sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où r est un réel positif.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives -2, $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, le point D milieu de [OB] et la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Montrer que R(A) = B, R(B) = C et R(C) = A. En déduire que le triangle ABC est équilatèral.
   Placer A, B, C, D dans le plan.

b. On considère le point L défini par $\overrightarrow{\text{AL}} = \overrightarrow{\text{OD}}$. Déterminer son affixe z_{L}.
Déterminer un argument de $\dfrac{z_{\text{L}}}{z_{\text{D}}}$.
En déduire que le vecteur $\overrightarrow{\text{OL}}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{OD}}$ et au vecteur $\overrightarrow{\text{AL}}$.
Montrer que L est sur le cercle de diamètre [AO].
Placer L sur la figure.

EXERCICE 2 **5,5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On donne le point A(6 ; 0) et le point A′(0 ; 2).
À tout point M de l'axe des abscisses différent de A on associe le point M' tel que :

$$\text{A}M = \text{A}'M' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{A}M},\ \overrightarrow{\text{A}'M'}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{mod } 2\pi.$$

On admet l'existence et l'unicité de M'.
On réalisera une figure avec, pour unité graphique 0,5 cm et pour cette figure, on prendra -4 pour abscisse de M.

1. Soit M un point de l'axe des abscisses différent de A.

a. Placer le point M' sur la figure.

b. Pour cette question on pourra donner une démonstration purement géométrique ou utiliser les nombres complexes.
Démontrer qu'il existe une unique rotation, dont on précisera le centre, noté I et l'angle, qui transforme A en A′ et M en M'.
Placer I sur la figure.

c. Démontrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par I.

2. On veut déterminer et construire les couples de points $(M,\ M')$ vérifiant la condition supplémentaire $MM' = 20$.

a. Calculer IM et démontrer qu'il existe deux couples solutions : $(M_1,\ M'_1)$ et $(M_2,\ M'_2)$.

b. Placer ces quatre points sur la figure.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats Étude d'une fonction et résolution d'une équation liée à cette fonction.

Dans tout le problème, on considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$(unité graphique : 4 cm).

Partie A

Étude du sens de variation de la fonction f

1. **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $]\ 0\ ;\ +\ \infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $]\ 0\ ;\ +\ \infty[$.

   b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

2. Montrer que, pour tout x élément de l'intervalle $\text{I} = [0{,}7\ ;\ 0{,}9]$, $f(x)$ est aussi élément de I et que $|f'(x)| \leqslant 0{,}9$.

Partie B

On se propose dans cette partie de montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et de donner une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une suite.

1. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\ \infty[$ par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x.$$

   a. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en 0.

   b. Montrer que g est une fonction strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera α, appartenant à l'intervalle $\text{I} = [0{,}7\ ;\ 0{,}9]$. Montrer que cette équation n'a pas d'autre solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.

   d. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x) = x$? Sur le graphique joint en annexe, que l'on rendra avec la copie, figure la partie de la courbe $\mathscr{C}$ dont les points ont une abscisse comprise entre 0,7 et 0,9 et le segment [AB], où A et B sont les points de coordonnées respectives (0,7 ; 0,7) et (0,9 ; 0,9). Que représente le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ f(\alpha))$ pour la courbe $\mathscr{C}$ et le segment [AB] ? Placer ce point sur le graphique joint en annexe.

2. On considère la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = 0{,}7$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour tout entier naturel n.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, a_n est élément de I.

   b. Construire sur le graphique joint en annexe les éléments de (a_n) pour $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Justifier que la suite n'est pas monotone.

   c. Démontrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que

$$|a_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}9\,|a_n - \alpha| \text{ pour tout entier } n.$$

   d. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que

$$|a_n - \alpha| \leqslant (0{,}9)^n \times 0{,}2 \text{ pour tout entier } n.$$

   En déduire que la suite (a_n) converge vers α.

3. **a.** Montrer que si $x < \alpha$ alors $f(x) > \alpha$ et que si $x > \alpha$ alors $f(x) < \alpha$. On admet que, pour tout entier naturel n pair, $a_n < \alpha$ et que pour tout entier naturel n impair, $a_n > \alpha$.

b. Le tableau de valeurs suivant a été écrit par un élève ayant recopié les résultats donnés par un logiciel informatique pour le calcul des valeurs approchées des termes de la suite (a_n), en ne retenant que les 5 premières décimales. Or, une valeur a été incorrectement recopiée.

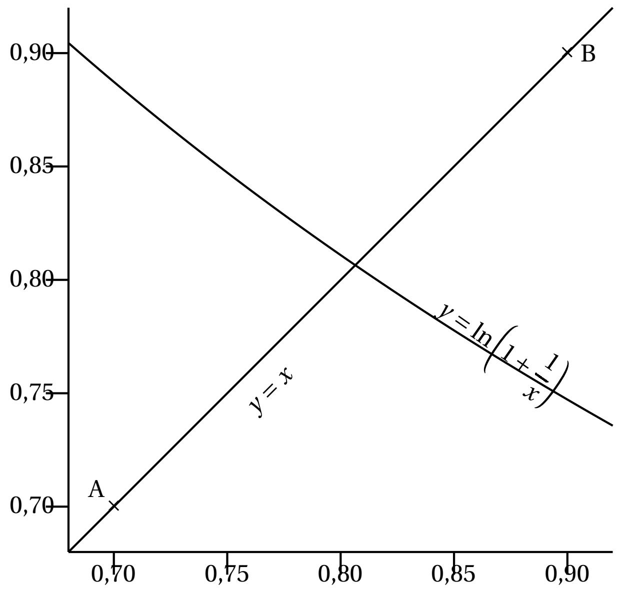
Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle on est sûr que la valeur approchée écrite de a_n est incorrecte ?
Pourquoi ? Soit p cette valeur. Calculer à la calculatrice une valeur approchée de a_p et vérifier la valeur approchée de a_{p+1} écrit dans le tableau.

Peut-on affirmer à l'aide de ce tableau que $0,80640 < \alpha < 0,80651$?

$n =$	a_n	$n =$	a_n
0	0,70000	12	0,80523
1	0,88730	13	0,80731
2	0,75471	14	0,80588
3	0,84371	15	0,80686
4	0,78172	16	0,80619
5	0,82383	17	0,80665
6	0,79472	18	0,80633
7	0,81461	19	0,80655
8	0,80091	20	0,80640
9	0,81029	21	0,80650
10	0,80884	22	0,80643
11	0,80826		

Annexe 1

Partie de la courbe $\mathscr{C}$ dont les points ont une abscisse comprise entre 0,69 et 0,91 et le segment [AB], où A et B sont les points de coordonnées respectives (0,7 ; 0,7) et (0,9 ; 0,9).



∽ Baccalauréat S France septembre 1999 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :

On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.

Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   a. Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$, puis $P(E_0)$.
   b. On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?
2. On appelle E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».
   a. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
   b. On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe d'un point M.

Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4i.

1. Soit θ un réel de $[0, 2\pi[$ et r un réel strictement positif.
   On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
   Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?
2. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :
$$\theta = 5\frac{\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$
3. On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].
   a. Prouver que PQRS est un parallélogramme.
   b. On pose : $Z = \dfrac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$.
   Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.
4. **a.** Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.
   b. Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ?

c. r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ?
Quelle est alors l'affixe de E ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité
Soit le repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{B}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{C}} = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}.$$

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).
2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_{G} de G.
   Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].
3. Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.
   a. Déterminer a et b pour que R(O) = G et R(A) = C.
   b. Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
   c. Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?
   d. Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.
4. Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.
   a. Déterminer a' et b' pour que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{G}$ et $f(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$.
   b. Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer le point $f(\mathrm{I})$. f est-elle une réflexion ?
   c. Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

PROBLÈME **11 points**
Commun à tous les candidats
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A :

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln x(2 - \ln x)$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f dans $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. On pose pour $p \geqslant 1$, $I_p = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b. Prouver, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 :

$$I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{\mathrm{e}^2} + (p+1)I_p.$$

c. En utilisant les résultats précédents, calculer successivement $I_2,\ I_3,\ I_4$.

d. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de $\mathscr{C}$, d'abscisses comprises entre 1 et e^2. Le point M de $\mathscr{C}$, d'abscisse x, décrit alors un cercle de rayon $f(x)$. Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

Partie B :

Soit a un réel strictement positif et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a. Soit T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

1. Écrire une équation de T_a.
2. Déterminer les réels a, pour lesquels T_a passe par l'origine O du repère.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à $\mathscr{C}$, passant par O.
   Tracer ces tangentes sur la figure.

Partie C :

On étudie maintenant l'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}x$.

1. On pose pour x strictement positif, $\varphi_1(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.
   Montrer que φ_1 est strictement croissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}[$.
2. On pose pour x strictement positif, $\varphi_2(x) = x + \mathrm{e}\ln x$.
   a. Étudier le sens de variation de φ_2 sur $]\,0,\ +\infty[$.
   b. Prouver que $\varphi_2(x) = 0$ a une solution unique sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$. On appelle α cette solution ; donner un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}.
   c. En déduire que $\varphi_2(x) = 0$ a une seule solution sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de Δ.

Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau septembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires.

On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore.
2. **a.** Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches ?

   b. Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $\dfrac{68}{165}$.
3. Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.
4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z tels que z^3 soit un nombre réel positif ou nul.

1. **a.** Le point A d'affixe $a = \text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ appartient-il à E ?

   b. On note B le point d'affixe $b = -1 + \text{i}\sqrt{3}$.

   Calculer un argument de b et montrer que B appartient à E.
2. On suppose $z \neq 0$ et on note θ un argument de z. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z^3 soit un nombre réel positif.
3. Après avoir vérifié que le point O appartient à E, déduire des résultats précédents que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.
4. À tout point P d'affixe $z \neq 0$, on associe les points Q d'affixe iz et R d'affixe z^4.

   On note F l'ensemble des points P tels que l'angle $(\overrightarrow{\text{O}Q}, \overrightarrow{\text{O}R})$ ait pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

   Montrer que F est l'ensemble E privé du point O.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. (unité graphique : 1 cm).

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 + 4i et 5 + 2i.

   On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ$ S.

   On désigne par A′ et B′ les images respectives de A et B par f. Calculer les affixes de A′ et B′ et placer les points A, B, C, A′ et B′ sur une figure.
2. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes et $|a| = 1$.

   À tout point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe z'.

   Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que :

$$z' = \frac{-3-4\mathrm{i}}{5}\overline{z} + \frac{38-6\mathrm{i}}{5}.$$

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. La transformation f est-elle une symétrie ?
4. On appelle D le point d'affixe 3 + 6i, Δ la médiatrice de [BD] et S′ la symétrie d'axe Δ.
   - **a.** Montrer que les droites Δ et (AB) sont parallèles. Déterminer S $\circ$ S′.
   - **b.** Montrer que $f \circ$ S′ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{DC}$. En déduire que $f = t' \circ$ S′.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Ce problème comporte trois parties **A, B** et **C**. Les parties **B** et **C** sont indépendantes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 4 cm).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = -x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right)$.

   En déduire que la courbe Γ admet, en $-\infty$, une asymptote, notée (Δ).
4. Tracer (Δ) et Γ.

Partie B

1. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1 + \mathrm{e}^{x}}$.
2. On note A, B et C les points de Γ d'abscisses respectives 0, 1 et - 1.

   On appelle T_0, T_1 et T_{-1} les tangentes respectives à la courbe Γ aux points A, B et C.
   - **a.** Démontrer que la droite (BC) est parallèle à la droite T_0.
   - **b.** Déterminer l'abscisse du point d'intersection de T_1 et T_{-1}.

Partie C

1. Soient u et v les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(t) = \ln(1+t) - t \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2.$$

Étudier les variations de u et v. En déduire que, pour tout nombre réel t positif, on a :

$$t - \frac{1}{2}t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t.$$

2. Soit n un entier naturel ($n \geqslant 1$). On considère le nombre $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

a. Démontrer que :

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1} - \frac{1}{2}.\frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{\mathrm{e}^2-1} \leqslant S_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}-1}.$$

b. On admet que la suite (S_n) a une limite réelle L.

Montrer que $\left|\mathrm{L} - \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\left(\mathrm{e}^2-1\right)}$.

Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1999

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. **a.** Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

   b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.

   À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément n de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3\}$, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.

   Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.

   L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles $\text{E}_0,\ \text{E}_1,\ \text{E}_2,\ \text{E}_3,\ \text{E}_4$. On admet que, pour chaque élément n de l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $P(\text{E}_n) = 32 \times 10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

   a. Calculer la probabilité $P(\text{E}_4)$. Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

   b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P(\text{C}/\text{E}_0)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ?

   En déduire la probabilité $P(\text{C} \cap \text{E}_0)$.

   c. Déterminer de même $P(\text{C}/\text{E}_n)$ puis $P(\text{C} \cap \text{E}_n)$ pour tout élément n de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. En déduire $P(\text{C})$.

   d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x\,\text{d}x$ et, pour tout nombre n entier naturel non nul,

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin 3x\,\text{d}x$.

1. **a.** Calculer I_0.

   b. En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.

2. **a.** En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer, lorsque $n \geqslant 1$, I_{n+2} en fonction de I_n.

   b. Vérifier que $I_3 = \dfrac{\pi^2}{108} - \dfrac{2}{27}$.

3. Sans calculer l'intégrale I_n,

a. montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ;

b. pour tout nombre n entier naturel non nul, comparer I_n à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n\,\mathrm{d}x$.

c. déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

On considère l'équation

$$(1) \quad : \quad 20b - 9c = 2.$$

où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. **a.** Montrer que si le couple $(b_0\ ;\ c_0$ d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

   b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b\ ;\ c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b\ ;\ c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + ... + \alpha_1 r + \alpha_0$, où $\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ ..., \alpha_1,\ \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r,\ 0 \leqslant \alpha_{n-1} < r, ...,\ 0 \leqslant$, $\alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).

   Montrer que $a+5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.

   Donner l'écriture de P dans le système décimal.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1+\ln x}{x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. On considère la fonction auxiliaire φ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2x^3 + x2 + \ln x.$$

   a. Étudier le sens de variations de φ.

   b. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution unique qu'on appellera α. Trouver le nombre entier naturel p tel que :

$$p \times 10^{-2} \leqslant \alpha < (p+1) \times 10^{-2}.$$

   c. En déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}$?

c. Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

d. Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + x.$$

On appelle Γ sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Préciser les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

e. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	0,2	0,4	2	2,5
$f(x)$									

Les valeurs de $f(x)$ seront données à 10^{-2} près.

f. Tracer $\mathscr{C}$ et Γ.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : 4 cm. À tout point M d'affixe non nulle z, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = z^2 + z + z - \frac{1 + \ln|z|}{z}.$$

On dit que M' est l'image de M.

1. On considère les points P et Q d'affixes respectives $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et i.
Calculer les affixes des images P′ et Q′ de ces points. Placer P, Q, P′ et Q′.

2. **a.** Δ est la demi-droite constituée des points d'affixe réelle strictement positive. Soit M un point de Δ, d'affixe x. Quelle est l'affixe de son image M' ?

b. En utilisant le tableau des variations de la fonction f, indiquer la valeur de x pour laquelle l'abscisse de M' est minimum.

c. Définir et représenter l'ensemble Δ' des points M' lorsque M décrit la demi-droite Δ.

3. Le point M décrit maintenant le cercle E de centre O et de rayon 1.
On note θ un argument de z, θ décrivant $[-\pi\ ;\ \pi]$.

a. Montrer qu'une représentation paramétrique de l'ensemble E′ des points M est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & \cos 2\theta \\ y(\theta) & = & \sin 2\theta + 2\sin\theta \end{array}\right.$$

b. Que peut-on dire des points E′ de paramètres respectifs θ et $-\theta$?
En déduire qu'il suffit de construire la partie E′ correspondant à l'ensemble $[0\ ;\ \pi]$ des valeurs de θ (partie qu'on désignera par E'_1 pour obtenir E′.

c. Étudier conjointement les variations sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ des fonctions x et y.

d. Préciser les points d'intersection de E'_1 avec chacun des axes de coordonnées.

e. Déterminer les points où E'_1 admet une tangente parallèle à l'un des axes de coordonnées. On admet qu'au point correspondant à la valeur π du paramètre, E'_1 admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

f. Tracer E′ en utilisant avec précision les éléments obtenus précédemment.

Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1999

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; −1 ; 2) et C(1 ; −1 ; 0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.
2. Soit D le point de coordonnées (1, 1, - 2). Calculer le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{DA}$ et du vecteur $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$.
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par D et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H de cette droite avec le plan ABC.

   c. Calculer DH (distance du point D au plan ABC).
4. Calculer les coordonnées du point D′, symétrique du point D par rapport au plan ABC.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; unité graphique : 2 cm.

1. Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2. Placer les points A, B, et D d'affixes respectives $\sqrt{3} + \text{i}$, $\sqrt{3} - \text{i}$ et $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.
2. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur d'affixe 1.

   a. Déterminer les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A′ et B′, images respectives des points A et B par la rotation R.

   b. Déterminer l'affixe $z_{D'}$, du point D′, image du point D par la translation T.

   c. Placer les points A′, B′ et D′.
3. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_{D'}}$.

   Justifier que la droite (OD′) est une médiatrice du triangle OA′B′.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

   a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.

   b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.
2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.

 a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

 b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

 a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

 b. Démontrer que si n est pair alors $81n - 1$ est impair.

 c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$y' - 2y = e^{2x}, \quad (E).$$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle : $y' - 2y = 0 \quad (E_0)$.
3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Étude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^{2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
   Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
   Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.
3. Soit un réel α strictement inférieur à -1. On considère le domaine plan $\mathscr{D}$ limité par $\mathscr{C}$, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = -1$ et l'axe des abscisses.

 a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire $\mathscr{D}(\alpha)$ du domaine $\mathscr{D}$.

 b. Déterminer la limite de $\mathscr{D}(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$.

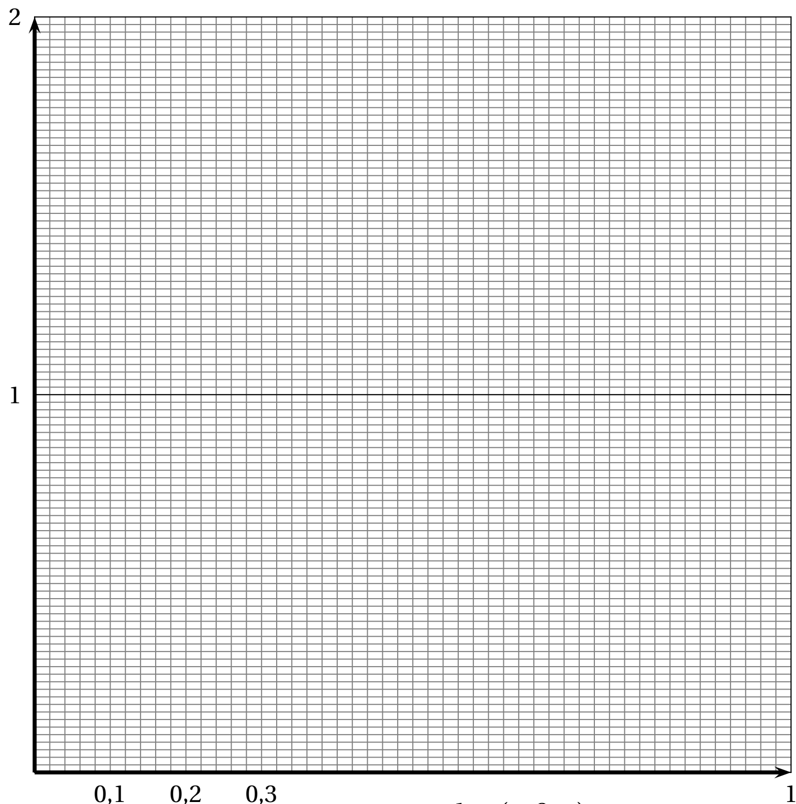
Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0,2 ; 0,3]$.
2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

   Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré, ci-dessous, où les unités sont de 10 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $[0 ; 0,3]$. Faire apparaître x_0 sur le graphique.



Démontrer que x_0 satisfait à la relation : $x_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2}{x_0+1}\right)$.

Partie D - Approximation de x_0

1. Soit h la fonction définie sur I = [0,2 ; 0,3] par

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x_0+1}\right).$$

a. Démontrer que pour tout x de I, $h(x)$ appartient à I.

b. Démontrer que pour tout x de I, $|h'(x)| \leqslant 0,42$.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0,2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - x_0| \leqslant 0,42|u_n - x_0|$.
À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire que, pour tout entier naturel n on a : $u_n - x_0| \leqslant 0,1 \times (0,42)^n$.

b. Déterminer la limite de (u_n) .

c. Déterminer un entier p tel que $|u_p - x_0| \leqslant 10^{-5}$.

d. On note b la valeur de u_p affichée sur la calculatrice. Déterminer β valeur décimale approchée par défaut de b à 10^{-5} près.
Classer par ordre croissant les réels $f(\beta)$, $f(\beta + 10^{-5})$ et 2.
En déduire la valeur décimale approchée par défaut de x_0 à 10^{-5} près.

Baccalauréat S Pondichéry juin 2000

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.

2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.

En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.

On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.

3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?

4. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet évènement.

a. Calculer $P(2\ ;\ 4)$.

b. Calculer $P(4\ ;\ 5)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 4 cm.

On appelle B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\text{i}).$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1.

2. Soit M_2 le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer le module et un argument de z_2.

Montrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.

3. Soit M_3 le point d'affixe z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.

a. Montrer que $z_3 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.

b. Montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1, M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.
5. À tout point M du plan d'affixe z (distinct de B), on associe le point M', d'affixe Z telle que $Z = \dfrac{1}{\mathrm{i} - z}$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan (M distinct de B) tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. **a.** Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?
   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a. Montrer que si U_n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.
   b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

PROBLÈME **11 points**

Partie A

⋆ Étude de la fonction $g\ :\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$

Soit la fonction g définie sur]- 3 ; 3[par : $g(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction g.
2. **a.** Calculer les limites de g en -3 et en 3.
   b. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,3\,[$.
   Dresser son tableau de variation sur $]-3\ ;\ 3[$.
3. soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormal d'unité graphique 4 centimètres. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction g dans ce repère.
   a. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   b. Tracer dans le repère la courbe $(\mathscr{C})$ et sa tangente (T).
4. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
5. **a.** Calculer la dérivée de la fonction $x \longmapsto xg(x)$.

b. Calculer l'aire, exprimée en cm^2, de la portion de plan délimitée par la courbe ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites déquations $x = 0$ et $x = 1$. On donnera la valeur exacte de cette aire, puis une valeur approchée au mm^2 près.

Partie B

⋆ Étude d'une courbe paramétrée

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 centimètres.
Soit la courbe paramétrée (Γ) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t\left(3-t^2\right) \\ y(t) & = & tg(t) \end{array}\right. \quad \text{pour} \quad t \in [-2\ ;\ 2].$$

où g désigne la fonction étudiée dans la partie A. On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t)\ ;\ y(t)$.

1. **a.** Comparer d'une part $x(t)$ et $x(-\ t)$ et d'autre par $y(t)$ et $y(-\ t)$.
   b. Par quelle transformation peut-on passer de $M(t)$ à $M(-t)$?
   En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
2. Étudier la fonction $x\ :\ t \longmapsto t\left(3-t^2\right)$ et dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,2]$.
3. En utilisant la partie **A.**, montrer que la fonction $t \longmapsto y(t)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$.
4. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sur $[0\,;\,2]$.
5. Pour quelles valeurs de t l'abscisse de $M(t)$ est-elle nulle ?
   Préciser alors les ordonnées des points correspondants de (Γ).
6. Tracé de (Γ)
   a. Placer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, les points M(0), M(1), M$\left(\sqrt{3}\right)$ et M(2) qui correspondent respectivement aux valeurs 0, 1, $\sqrt{3}$ et 2 du paramètre t.
   b. Préciser un vecteur directeur des tangentes à (Γ) aux points M(0) et M(1) et tracer ces tangentes.
   c. Tracer (Γ).

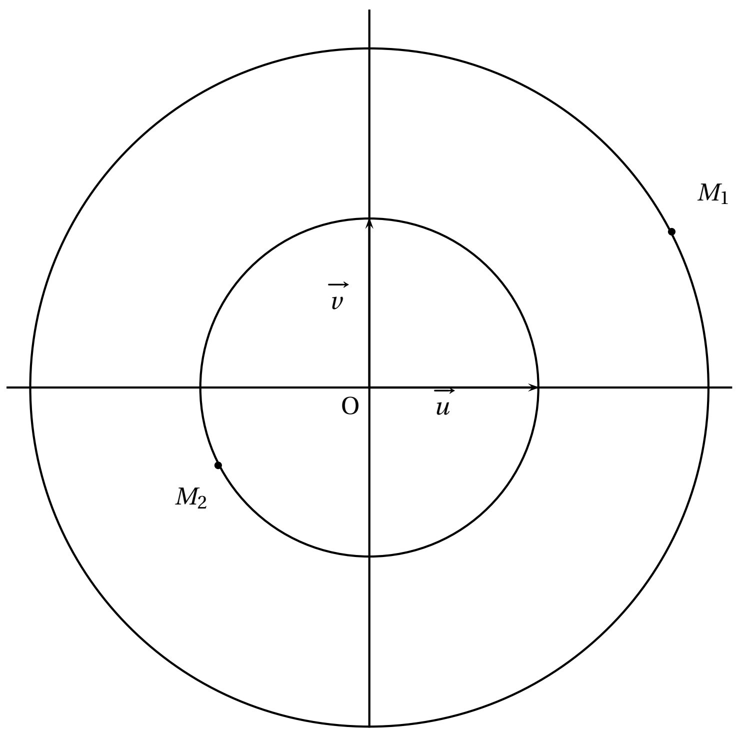
∽ Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2000 ∾

EXERCICE 1 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, z est un nombre complexe non nul.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$. L'affixe de I est donc $\dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$.
Note : les questions **2, 3** et **4** sont largement indépendantes.

1. **a.** Donner une relation entre les modules de z et z'.
Donner une relation entre leurs arguments.

b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2.
Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M_1', puis le point I_1 milieu du segment $[M_1 M_1']$. Effectuer cette construction.



2. Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{\text{i}\theta}$.

a. Calculer sous forme algébrique l'affixe de I.

b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle $\mathcal{C}$, de centre O et de rayon 1. Expliquer comment, en utilisant le résultat de la question **2 a**, on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2 M_2']$.
Effectuer cette construction.
Donner (sans justification) l'ensemble décrit par I lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

3. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O.

a. Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.

b. Développer $(z-2\mathrm{i})^2+3$.
Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de I est $2\mathrm{i}$.

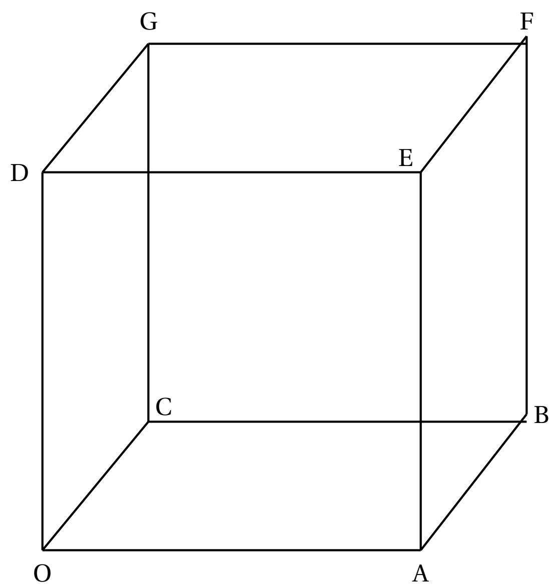
4. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O, d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ (x et y réels).

a. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de l'affixe de I.

b. Déterminer l'ensemble A des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des abscisses.

c. Déterminer l'ensemble B des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 5 points
Enseignement obligatoire



Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-dessus.
L'espace est orienté par le repère orthonormai direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right)$. On désigne par a un réel strictement positif.
L, M et K sont les points définis par $\overrightarrow{\mathrm{O}L} = a\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, et $\overrightarrow{\mathrm{B}K} = a\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.

1. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{D}M} \wedge \overrightarrow{\mathrm{D}L}$.

b. En déduire l'aire du triangle DLM.

c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM).

2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM).

a. Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K} = \overrightarrow{\mathrm{O}H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}K}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{O}H}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}H} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OK}}$.
Démontrer que $\lambda = \dfrac{a}{a^2+2}$. En déduire que H appartient au segment [OK].

c. Déterminer les coordonnées de H.

d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{O}K}$. En déduire que $HK = \dfrac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a.

EXERCICE 2 5 points

Enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O. On a donc $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

On note R_{A} et R_{B} les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$ et S_{O} la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB) , on trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc $(\overrightarrow{\mathrm{B}E}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{A}G}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

1. **a.** Déterminer $\mathrm{S}_{(\mathrm{AO})} \circ S_{(\mathrm{AB})}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO).

b. En écrivant R_{B} sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_{\mathrm{A}} \circ R_{\mathrm{B}} = S_{\mathrm{O}}$.

2. **a.** Déterminer l'image de E par $R_{\mathrm{A}} \circ R_{\mathrm{B}}$.

b. En déduire que O est le milieu du segment [EG].

c. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle.

Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_{\mathrm{O}} \circ R_D$. Déterminer la transformation $\mathrm{R}_{\mathrm{F}} \circ S_{\mathrm{O}} \circ R_D$.

d. Placer H le symétrique de D par rapport à O.

Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O.

PROBLÈME 10 points

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x>0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité graphique 5 cm).

Partie A

1. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

2. Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0. (on pourra utiliser, pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^n e^{-u} = 0$.

Que peut-on en déduire pour la fonction f ? Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. Montrer que dans $]0 ; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.
2. Démontrer que l'équation $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.
3. On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$.
4. Pour tout $a > 0$, on note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Montrer que T_a a pour équation $y = Ax$. Tracer T_a, puis la courbe $\mathscr{C}$.
5. Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathscr{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.
6. On admettra que T_α est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $]0 ; +\infty[$.
   a. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$, suivant le réel m donné.
   b. Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$ selon le réel m donné.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que la fonction h, définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2000

Exercice 1 **4 points**

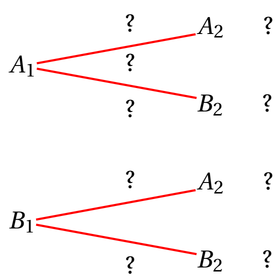
Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le fim B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le fim A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. **a.** Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$$p(A_2/A_1),\ p(A_2/B_1)\ et\ p(A_1 \cap A_2)$$

c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a. Calculer $P(-1)$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

c. Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par $A,\ B,\ C$ et G les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -1,\ z_{\text{B}} = 2 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{C}} = 2 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{G}} = 3.$$

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.

b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{G}} - z_{\text{C}}}$. En déduire la nature du triangle GAC.

3. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(-\overrightarrow{M\text{A}} + 2\overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right) \cdot \overrightarrow{\text{CG}} = +12 \quad (1)$$

a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(\text{A},\ -1)\ ;\ (\text{B},\ 2)\ ;\ (\text{C},\ 2)\}.$$

b. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{G}M}.\overrightarrow{\text{CG}} = -4 \quad (2)$.

c. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).

d. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{A}M}.\overrightarrow{\text{GC}} = 0$.

e. En déduire l'ensemble (D) et le tracer.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Les points $A_0 = \text{O}\ ;\ A_1\ ;\ \ldots\ ;\ A_{20}$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.

Les points $B_0 = \text{O}\ ;\ B_1\ ;\ B_{14}$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.

Soit r_{A} la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{21}$ et r_{B} la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{15}$.

On définit la suite (M_n) de points par :

- M_0 est l'un des points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{20}$;
- pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = r_{\text{A}}(M_n)$.

On définit la suite (P_n) de points par :

- P_0 est l'un des points $B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{14}$
- pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = r_{\text{B}}(P_n)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = \text{O}.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = \text{O}$.

a. Indiquer la position du point M_{2000} et celle du point P_{2000}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = \text{O}$. En déduire l'ensemble S.

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$.
On considère l'équation $(E) : 7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

a. Déterminer une solution particulière $(a\ ;\ b)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

Problème **11 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x^2) - 2x.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 1 cm.

Partie A - Étude de f.

1. Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) = 2x\ln x - 2x$ puis que $f(x) = 2x\ln\dfrac{x}{\text{e}}$.
2. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.

   b. Montrer que f est dérivable en tout $x > 0$; calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

   c. Étudier le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.

   d. Donner le tableau de variation de f sur $]0~;~+\infty[$.
3. Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet sur l'intervalle $[1~;~5]$ une unique solution et en donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B - Calcul d'aires

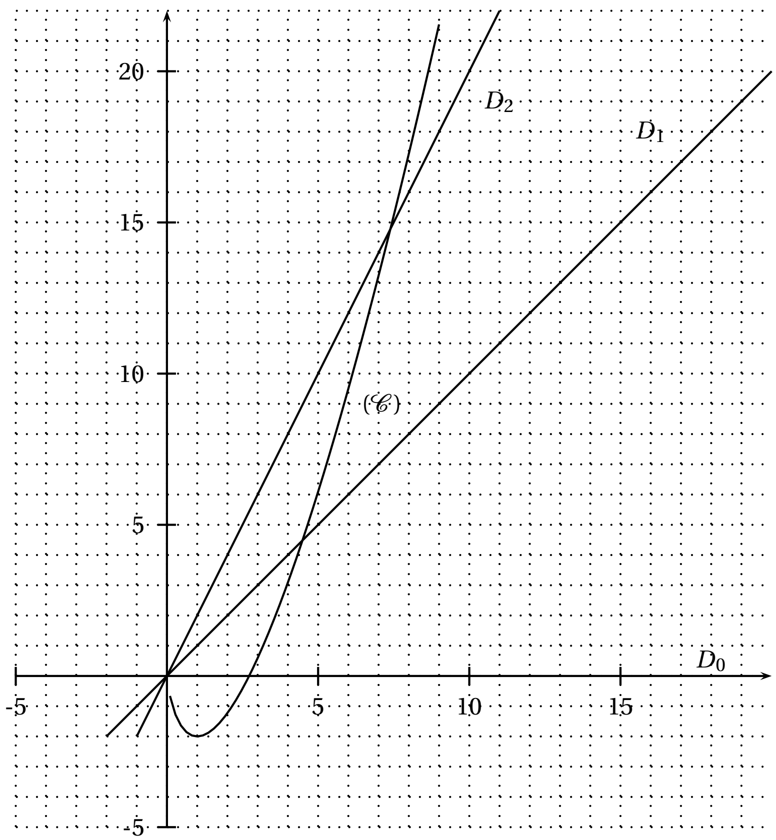
1. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l}F(0) & = & 0\\ F(x) & = & x^2\ln x - 2 - \dfrac{3x^2}{2} \quad \text{si} \quad x > 0\end{array}\right.$$

   a. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$; montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

   b. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0~;~+\infty[$, $F'(x) = f(x)$.
2. On considère pour chaque entier n positif ou nul, la droite D_n d'équation $y = nx$.

   On trouvera ci-dessous un tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ et des droites $D_0,~D_1,~D_2$.



a. Déterminer les coordonnées du point I_n, d'abscisse strictement positive, intersection de $(\mathscr{C})$ et de D_n.

On appelle P_n le point de l'axe des abscisses de même abscisse que I_n. Placer les points $I_0,\ I_1,\ I_2,\ P_0, P_1, P_2$ sur la figure donnée en annexe.

b. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C})$ et de D_n pour les abscisses appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère le domaine A_n situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, D_{n-1} et D_n.

On note a_n son aire, exprimée en unités d'aire.

a. Faire apparaître les domaines A_1 et A_2 sur la figure.

b. Calculer l'aire t_n du triangle $\mathrm{O}P_nI_n$, en unités d'aire.

c. Calculer l'aire u_n, en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses, et les parallèles à l'axe des ordonnées passant par P_0 et P_n.

d. Vérifier que l'aire v_n en unités d'aire, du domaine situé dans le quart de plan défini par $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, délimité par $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et D_n, est $v_n = t_n - u_n = \mathrm{e}^2\left(\mathrm{e}^n - 1\right)$.

e. Calculer alors a_n.

4. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique.
En préciser la raison et le premier terme.

Baccalauréat S Asie juin 2000

Exercice 1 4 points

Commun à tous les candidats

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\dfrac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\dfrac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup ».

B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ».

On pose $P_n = p(A_n)$.

Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \dfrac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}.$$
3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - \dfrac{3}{13}$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 2 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\text{i}\,;\ z_{\text{B}} = 3\,;\ z_{\text{C}} = 2+3\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = -1+2\text{i}.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.
2. **a.** Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.

   b. Calculer le complexe $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.

   c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?
3. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

   b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère ABCD.
4. **a.** Placer sur la figure précédente les points A_1, B_1, C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{\text{DA}_1} = \overrightarrow{\text{A}_1\text{B}_1} = \overrightarrow{\text{B}_1\text{C}}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à [DC], le quadrilatère $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ étant un carré situé àl'extérieur du quadrilatère ABCD.

   b. Tracer le carré $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ et déterminer son aire s_1.
5. **a.** On continue par le même procédé : un carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$ étant déterminé, on considère les points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{\text{D}_n\text{A}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{B}_{n+1}\text{C}_n}$ où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[\text{D}_n\text{C}_n]$, le quadrilatère $\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}\text{C}_{n+1}\text{D}_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$.

   Tracer le carré $\text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2\text{D}_2$.

b. Soit s_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, puis de n.
En déduire s_n , en fonction de n.

c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, … et $A_nB_nC_nD_n$.

d. La suite (s_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

Exercice 2 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Déterminer PGCD(2688 ; 3024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes
(1) $2688x + 3024y = -3360$;
(2) $8x + 9y = -10$.

b. Vérifier que (1 ; − 2) est une solution particulière de l'équation (2).

c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Problème 11 points

Partie A
Étude d'une fonction
On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}.$$

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 5 cm.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de $(\mathscr{C})$.
2. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l' intervalle $\left[\frac{1}{e}\ ;\ 1\right]$ une solution unique, notée α.
   Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.
   Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie B Calcul d'aire

1. Déterminer une équation de la tangente (D) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.
2. **a.** Soit φ la fonction définie, pour tout $x > 0$, par :

$$\varphi(x) = x - x^2 + \ln x.$$

   Calculer $\varphi'(x)$.
   En déduire le sens de variation de φ, puis le signe de $\varphi(x)$, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

   c. En déduire la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (D).
3. On considère le domaine limité sur le graphique par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et la tangente (D).

   a. Hachurer ce domaine.

   b. Soit $\mathscr{A}$ son aire, en cm^2. Écrire la valeur exacte de $\mathscr{A}$ comme expression polynomiale du second degré en α.

Partie C Étude d'une suite
Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$. On note M_0 le point de $(\mathscr{C})$d abscisse x_0.

1. **a.** Donner une équation de la tangente (T_0) à $(\mathscr{C})$ en M_0, en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

   b. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses. Écrire x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.
2. On considère la fonction h définie sur $\left]\frac{1}{e}\ ;\ \alpha\right]$ par :

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \text{ (On remarquera que } h(x_0) = x_1\text{)}.$$

   a. Montrer que $h'(x) = \dfrac{f''(x) \times f(x)}{[f'(x)]^2}$.

b. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$.

c. En déduire que h est strictement croissante sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$, puis montrer que $x_1 < \alpha$.

d. En écrivant $h(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, étudier le signe de $h(x) - x$ sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$

En déduire que $\dfrac{1}{e} < x_0 < x_1 < \alpha$.

3. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$, $h(x)$ appartient à $\left]\dfrac{1}{e}\,;\,\alpha\right]$.

b. On considère la suite (x_n) de réels définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ pour tout entier naturel n.

Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.

Baccalauréat S Centres étrangers juin 2000

Exercice 1 **5 points**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.
   a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »
   E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »
   b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.
   Établir la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
   On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
   On effectue ainsi k tirages successifs.
   Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 km. Le plan j représente le sol.

Les deux « routes aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) , dont on connaît des représentations paramétriques :

$$(D_1)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+a\\ y &=& 9+3a\\ z &=& 2\end{array}\right. \text{ avec } a\in\mathbb{R} \quad (D_2)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0,5+2b\\ y &=& 4+b\\ z &=& 4-b\end{array}\right. \text{ avec } b\in\mathbb{R}.$$

1. **a.** Indiquer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ directeur de la droite (D_1) et d'un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ directeur de la droite (D_2).
   b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires.
2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, de coordonnées S$(3~;~4~;~0,1)$, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R) . Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et soit (P_2) le plan contenant S et (D_2).
   a. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1).
   b. Montrer que (D_1) est sécante à (P_2).
   c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que
AB = BC = CD = DA = 5 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$.
On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].
On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(\text{A}) = \text{B}$, $f(\text{B}) = \text{O}$, $f(\text{D}) = \text{C}$.

  a. Prouver que f est un antidéplacement.

  b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.

  c. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

  a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.

  b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?

3. Soit s_1, la symétrie orthogonale d'axe (BC).

  a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_1 \circ s_2$.

  b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

  a. Déterminer $g(\text{D})$, $g(\text{I})$, $g(\text{O})$. En déduire la nature précise de la transformation g.

  b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

Problème **10 points**

Les buts du problème sont l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\left(e^{2x}-1\right)}{e^x},$$

puis la recherche de primitives de cette fonction.

Partie A - Étude de fonctions auxiliaires

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1).$$

   a. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

   b. Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

   c. Résoudre l'inéquation $1-\ln(x-1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

   d. Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

   e. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α, dans l'intervalle $[e+1\,;\,e^3+1]$ et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1\,;\,\alpha[$ et $]\alpha\,;\,+\infty[$.

2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$.

   b. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

   c. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1\,;\,\sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}\,;\,+\infty[$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a

$$f(x) = \varphi(e^x).$$

2. En déduire :

   a. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

   b. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   c. Le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant \dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$.

4. Reproduire le tableau suivant et le compléter en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
f(x)						

5. Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée, On prendra 10 comme valeur approchée de α.

Partie C - Recherche de primitives de f

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

2. On pose $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

a. Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

∽ Baccalauréat S France juin 2000 ∾

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On note $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p(\text{A} / \text{B})$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.

   On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».

   Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

   a. On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_1)$.

   b. On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_2/\text{T}_1)$, puis $p\left(\text{T}_2/\overline{\text{T}_1}\right)$. En déduire $p(T_2 \cap \text{T}_1)$ et $p\left(\text{T}_2 \cap \overline{\text{T}_1}\right)$.

   (On pourra éventuellement utiliser un arbre.)

   c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

   Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_\text{A} = 1$ et B d'affixe $z_\text{B} = 2$.

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

On note M le point d'affixe $z = 1 + \text{e}^{2\text{i}\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 1.

2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\,\overrightarrow{\text{A}M})$ en fonction de θ.

   En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0\,;\,\pi[$.

3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle -2θ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ puis que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

   On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et A′ l'image de A par r.

   a. Définir l'image $(\mathscr{C}')$ du cercle $(\mathscr{C})$ par r.

   Placer sur une figure A, B, $(\mathscr{C})$, M, $(\mathscr{C}')$ puis le point M' image de M par r.

b. Montrer que le triangle AMO est équilatéral.

c. Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en O et en M'.

d. Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu de $[\mathrm{A}'P]$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B et le point E tel que $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
Pour la figure, on prendra comme unité de longueur le centimètre et AB = 16. Cette figure sera complétée au fur et à mesure.
Soit un point C, distinct de A, tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}C}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en F.
On appelle I le milieu de [BC], J le milieu de [EF] et D le point d'intersection des droites (EC) et (BF).
On note h_{A} l'homothétie de centre A qui transforme B en E et h_D l'homothétie de centre D qui transforme E en C.

1. Déterminer $h_{\mathrm{A}}(C)$ puis $h_D(F)$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\mathrm{A}}$ puis de $h_{\mathrm{A}} \circ h_D$.
3. On appelle E' l'image de E par h_{A} et E'' l'image de E' par h_D Représenter E', puis construire E'' en justifiant la construction.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\mathrm{A}} \circ h_{\mathrm{A}} \circ h_D$.
5. Montrer que le quadrilatère BECE'' est un parallélogramme.
6. On appelle (Δ) l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
   (Δ) est donc une demi-droite ouverte d'origine A.
   Pour la suite, les points A, B, E sont fixes et le point C décrit (Δ).
   Déterminer et construire le lieu géométrique $(\Delta)''$ du point E''.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A

★ On considère la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-\,x^2}$$

et on appelle $(\mathscr{C}_1)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel positif x, $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-\,x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-\,x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1.
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.
4. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$.
   Déterminer la position de $(\mathscr{C}_1)$ par rapport à (Δ).
5. Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et (Δ).

Partie B

★ On considère la fonction f_3 définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_3(x) = x^3\mathrm{e}^{-\,x^2}$ et on appelle $(\mathscr{C}_3)$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3.
2. Déterminer les positions relatives de $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.
3. Tracer $(\mathscr{C}_3)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_1)$ (on admettra que $(\mathscr{C}_3)$ a la même asymptote que $(\mathscr{C}_1)$ en $+\infty$.
4. On appelle (D) la droite d'équation $x = 1$. Soit $\mathscr{A}_1$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_1)$, les deux axes de coordonnées et la droite (D) et soit $\mathscr{A}_3$ l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_3)$ les deux axes de coordonnées et la droite (D).
   a. Calculer $\mathscr{A}_1$.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A}_3 = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}} + \mathscr{A}_1$.

Partie C

★ On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-\,x^2}.$$

On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.
   On note α_n, ce maximum.
2. On appelle S_n le point de $(\mathscr{C}_n)$ d'abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.
   Montrer aue, pour tout n, $(\mathscr{C}_n)$ passe par S_2. Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.
3. Soit la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\,\frac{x}{2}\left[-\,1+\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

   c'est-à-dire $g(x) = \exp\left[-\,\frac{x}{2}\left(-\,1 + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]$.

a. Étudier le sens de variation de g.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1,\ \alpha_n = g(n)$.
En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2.

Baccalauréat S La Réunion juillet 2000

Exercice 1 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité : 2 cm). On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$. On pose $\text{j} = \text{e}^{2\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. **a.** Vérifier que 1 , j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.

   b. Calculer $(1-\text{j})(1+\text{j}+\text{j}^2)$; en déduire que $1+\text{j}+\text{j}^2 = 0$.

   c. Vérifier que $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} + \text{j}^2 = 0$.

2. Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c.

   a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = \text{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + bj + cj^2 = 0$.

3. À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe les points R, M et M' d'affixes respectives 1, z et $\overline{z}$.

   a. Pour quelles valeurs de z les points M et M' sont-ils distincts ?

   b. En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que le triangle RMM' soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On désigne par Γ la courbe paramétrée, ensemble des points $M(\theta)$ dont les coordonnées $(x(\theta),\ y(\theta)$ sont définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(\theta) & = & 20\text{e}^{-\theta}\cos\theta \\ y(\theta) & = & 20\text{e}^{-\theta}\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{où} \quad \theta \in [0\ ;\ +\infty[$$

1. Soient M et M_1, les points de Γ correspondant respectivement aux paramètres θ et $\theta + \pi$.

   a. Démontrer qu'il existe un réel k, indépendant de θ, que l'on déterminera, tel que

   $$\overrightarrow{\text{O}M_1} = k\overrightarrow{\text{O}M}.$$

   b. En déduire une transformation géométrique par laquelle, pour tout réel θ positif, M_1 est l'image de M.

2. On appelle Γ_1 la partie de Γ correspondant à θ élément de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

   a. Montrer que :

   $$x'(\theta) = -20\sqrt{2}\text{e}^{-\theta}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad y'(\theta) = -20\sqrt{2}\text{e}^{-\theta}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

   b. Étudier le sens de variations des fonctions x et y sur $[0\ ;\ \pi]$; rassembler les résultats dans un tableau unique et indiquer les points de Γ, en lesquels la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

3. Tracer Γ_1, ainsi que ses tangentes aux points M(0), $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\mathrm{M}(\pi)$.
(unité graphique : 1 cm ; on prendra la feuille de papier millimétré dans le sens de la longueur avec l'axe des ordonnées à 4 cm du bord gauche).

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n-4$.
2. On pose $\alpha = 2n+1$ et $\beta = n+3$. On note d le PGCD de α et β.
   - **a.** Établir une relation entre α et β indépendante de n.
   - **b.** Démontrer que d est un diviseur de 5.
   - **c.** Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n-2$ est multiple de 5.
3. Montrer que $2n+1$ et n sont premiers entre eux.
4. **a.** Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.
   - **b.** Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Problème **10 points**

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (**partie A**), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

Partie A :

Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = (1-x)\mathrm{e}^x.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ leurs courbes représentatives respectives

1. **a.** Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   - **b.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
   - **c.** Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g, sur l'ensemble des nombres réels.
2. Pour tout réel x, on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
   - **a.** Montrer que, pour tout réel x, $h'(x) = 1 - g(x)$.
   - **b.** En déduire le sens de variations de la fonction h sur l'ensemble des nombres réels.
   - **c.** Démontrer que les courbe $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse notée α, appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.
     Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   - **d.** Étudier, suivant les valeurs de x, la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
3. Traver la droite (Δ) et les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.
4. Pour tout réel x, on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\theta(x)$.

b. En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en α, l'aire en cm^2 du domaine limité sur le graphique par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3}.

2. **a.** En utilisant le tableau de variations de la fonction g définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$,

$$\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

b. En déduire que, pour tout nombre entier $k \geqslant 2$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \leqslant \dfrac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right)$.

c. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$. En déduire que la suite (S_n) est décroissante.

3. Pour tout entier $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 20$, $u_n \geqslant 0$.

b. En utilisant le tableau de variations de la fonction f définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$, $1+x \leqslant \mathrm{e}^x$.

c. En déduire que pour tout nombre entier $k \geqslant 1$, $\dfrac{k+1}{k} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

d. Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

En raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n > 20$,

$$\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leqslant \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel $n > 20$,

$$u_n = \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

puis que, pour tout entier naturel $n > 20$, $un \leqslant 0,049$.

4. On admet que la suite (S_n) est convergente de limite notée C.

a. Justifier l'encadrement $S_{20} - 0,049 \leqslant \mathrm{C} \leqslant S_{20}$.

b. Déterminer un encadrement de C d'amplitude 0,05.

∽ Baccalauréat S Liban juin 2000 ∽

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes.
Dans les questions **1** et **2** on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :

A « Les trois boules sont rouges. »

B « Les trois boules sont de la même couleur. »

C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

  a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

  b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
  Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :

D « Tirer deux boules rouges. »

E « Tirer deux boules de la même couleur. »

  a. Montrer que la probabilité de l'événement D est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

  b. Calculer la probabilité de l'évènement E, $p(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geqslant \frac{1}{2}$?

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-$ i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-$ i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1+\mathrm{i}z}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?

2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1+i$?

3. Montrer que l'équation $\dfrac{1+\mathrm{i}iz}{z+\mathrm{i}} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i}i)}{z+\mathrm{i}}$, en déduire $\mathrm{O}M' = \dfrac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M}$ et :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{B}},\ \overrightarrow{M\mathrm{A}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

6. Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B, montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

1. Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1+\text{i}$; $b = -4-\text{i}$. Soit f la transformation du plan $(\mathcal{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{\text{O}M'} = 2\overrightarrow{\text{A}M} + \overrightarrow{\text{B}M}$.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$.
   Les coordonnées $(x' ; y')$ de M' sont alors : $x' = 3x+2$ et $y' = 3y-1$.
   a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.
   b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.
   c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x' ; y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.
   d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?
   e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x' ; y')$ qui conviennent. En déduire les couples $(x ; y)$ correspondant aux couples $(x' ; y')$ trouvés.

Problème **11 points**

★ Partie A - Préliminaires

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(t) = \text{e}^t - t - 1.$$
   Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$?
2. En déduire les inégalités suivantes :
   a. Pour tout réel t, $\text{e}^t \geqslant t+1$, $\text{e}^t > t$ et $-t\text{e}^{-t} > -1$.
   b. Pour tout réel t tel que $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
3. En déduire que pour tout réel x, $\ln(1 - x\text{e}^{-x}) < -x\text{e}^{-x}$.

★ Partie B - Étude d'une fonction

On considère lafonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^2 - 2\ln\left(\text{e}^x - x\right).$$

1. Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - x\text{e}^{-x})$. Quelle est la limite de f en $+\infty$? On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(\text{e}^x - x - 1)}{\text{e}^x - x}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   Dans un repère orthonormal (unité : 3 cm), on considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ sont asymptotes en $+\infty$. Étudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$.

3. Donner une équation de chacune des tangentes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ respectivement aux courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisse 0.

4. Tracer dans un même repère les courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$ et leurs tangentes $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$.

★ Partie C - Étude d'une intégrale

1. Soit n un entier naturel, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   a. Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.
   b. Calculer u_n à l'aide d'une intégration par parties.
   c. Déterminer la limite de la suite u_n .
2. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, la parabole $(\mathscr{P})$ et la courbe $(\mathscr{C})$ est définie par

$$I_n = -2\int_0^n \ln\left(1 - x\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$$

   a. Montrer en utilisant la question 3) des préliminaires que $I_n \geqslant 2u_n$.
   b. On admet que la suite (I_n) a pour limite l . Montrer que : $l \geqslant 2$.

∽ Baccalauréat S Polynésie juin 2000 ∾

EXERCICE 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}.$$

1. Si $z = x+\mathrm{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.

On vérifiera que $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.

En déduire la nature de :

- **a.** l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;
- **b.** l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
- **c.** Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2-\mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$.

En remarquant que $Z = \dfrac{z-z_A}{z-z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z)-1| \times |z+2\mathrm{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac.

Quel est le nombre de tirages possibles ?

2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :

A : « Les quatre numéros sont identiques ».
B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
C : « Tous les jetons sont blancs ».
D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

- **a.** Montrer que la probabilité de l'évènement B, est $\dfrac{4}{105}$.
- **b.** Calculer la probabilité des évènements A, C, D, E.

c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B.

On établit la règle de jeu suivante :
- Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
- Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
- Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
- Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.

Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.

G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

EXERCICE 2 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation
(1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0~;~y_0)$. Montrer que d divise 60.

b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0~;~y_0)$ à l'équation (1).

2. On considère l'équation : (2) $24x + 36y = 60$. (x et y entiers relatifs).

a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x~;~y)$ solutions.

c. Énumérer tous les couples $(x~;~y)$ solutions de (2) et tels que :

$$-10 \leqslant x \leqslant 10.$$

Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x~;~y)$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+3t \\ y &=& 1-2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x;y)$ de l'équation (2) appartiennent à E.

Comment peut-on caractériser S ?

PROBLÈME 10 points

Partie A

On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

On appelle $(\mathscr{C}_f)$ la courbe d' équation $y = f(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

On prendra 2 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 6 cm pour π unités sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
2. Montrer que la fonction dérivée de f vérifie :
   $f'(x) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-x} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, pour x élément de $\mathbb{R}$.
3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
   Recopier et compléter le tableau suivant :

x	$-\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ π
$x + \dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
Signe de $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$	

   En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$.
4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ ainsi que les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations $y = -\mathrm{e}^{-x}$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$.
5. Déterminer algébriquement sur $\mathbb{R}$, puis sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, les coordonnées des points communs à :
   a. $(\mathscr{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
   b. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_1)$.
   c. $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
6. Déterminer un réel α tel que, pour $x \geqslant \alpha$, on ait $|f(x)| \leqslant 10^{-2}$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4 (on rappelle que $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$), trouver une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.
2. En déduire qu'on peut choisir $F(x) = -\dfrac{1}{4} f^{(3)}(x)$.
3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$. Montrer que $I = \dfrac{\mathrm{e}+1}{2}$.

Partie C

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\, \mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $I_0 = I$ et interpréter I_0 comme l'aire d'un domaine plan. Hachurer ce domaine.
2. Montrer que, pour tout naturel n, $I_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{2}\left(\mathrm{e}^{-\pi} + 1\right)$.
3. Prouver que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   Calculer sa raison.
4. Prouver que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.