Baccalauréat S 2002

L'intégrale de septembre 2001 à juin 2002

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Antilles-Guyane septembre 2001 3

France septembre 2001 6

Polynésie spécialité septembre 2001 9

Nouvelle-Calédonie décembre 2001 .12

Amérique du Sud décembre 2001 15

Pondichéry avril 2002 18

Amérique du Nord juin 2002 21

Antilles-Guyane juin 2002 25

Asie juin 2002 28

Centres étrangers juin 2002 32

France juin 2002 35

La Réunion juin 2002 39

Polynésie juin 2002 43

Baccalauréat S Antilles - Guyane septembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & m\sin x & \text{pour } x \in [0\,;\,\pi] \\ f(x) & = & 0 & \text{sinon.}\end{array}\right.$$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.
2. Représenter f dans un repère orthonormé.
3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.
   Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.
4. Calculer la probabilité $p\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right)$.
5. Calculer les probabilités $p(X \geqslant 0)$ et $p(X \leqslant 0)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :
   $$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$
2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4\text{i}$ et $b = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
   Calculer les distances OA, OB et AB.
   En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des points pondérés (O ; -1), (D ; 1) et (B ; 1).
   a. Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6\text{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
   c. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. **a.** Justifier l'égalité $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}},\ \overrightarrow{\text{GC}}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\dfrac{\text{GC}}{\text{GA}}$.
   Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD$(a+b\,;\ ab) = p$, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.)

b. En déduire que p divise a.
On constate donc, de même, que p divise b.

c. Démontrer que $\text{PGCD}(a,\ b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

a. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lcr}\text{PGCD}(a,\ b) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

b. En déduire les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcr}\text{PGCD}(a+b,\ ab) & = & 5\\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170\end{array}\right.$$

PROBLÈME **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On considère la fonction f, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2.$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction f et tracé de la courbe $(\mathscr{C})$

1. **a.** Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\ln x = X$).

b. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2. **a.** Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $\text{e}^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.
Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = f(x) - \left(4\text{e}^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8}\right).$$

a. Montrer que $\varphi'(x) = \dfrac{4\ln x - 1}{x} - 4\text{e}^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer $\varphi''(x)$.

b. Étudier le sens de variation de φ' sur $]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a $\varphi'(x) \leqslant 0$.

c. Calculer $\varphi\left(\text{e}^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ déterminer le signe de $\varphi(x)$.
En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. (Unité graphique : 2 cm).

Partie B - Calcul d'une aire

1. Vérifier que la fonction h, définie par $x \longmapsto x\ln x - x$, est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On pose $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} \ln x \,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_1.

b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathrm{I}_2 = \dfrac{5}{4}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} - \dfrac{5}{\mathrm{e}}$.

c. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$.

Baccalauréat S France septembre 2001

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes a et b contenant des boules blanches ou rouges indiscernables au toucher. L'épreuve consiste à choisir une urne parmi les urnes a et b proposées (le choix de l'urne est effectué au hasard, les deux choix étant équiprobables) puis à effectuer le tirage d'une boule dans l'urne choisie.

On note A l'évènement « l'urne a est choisie » , B l'évènement « l'urne b est choisie » et R l'évènement « une boule rouge est obtenue au tirage ».

On note $p_{\text{A}}(\text{R})$ la probabilité conditionnelle de l'évènement R par rapport à l'évènement A.

1. Dans cette question, l'urne a contient une boule rouge et quatre boules blanches, l'urne b contient quatre boules rouges et deux boules blanches.
   - **a.** Déterminer les probabilités suivantes : $p(\text{A})$, $p_{\text{A}}(\text{R})$, $p(\text{A} \cap \text{R})$.
   - **b.** Montrer que
   $$p(R) = \frac{13}{30}$$
   - **c.** Sachant que la boule obtenue est rouge, quelle est la probabilité que l'urne choisie soit l'urne a ?
2. Dans cette question, on suppose que l'urne a contient quatre boules blanches et l'urne b deux boules blanches. L'urne a contient en outre n boules rouges (où n désigne un entier naturel inférieur ou égal à 5), l'urne b en contient $5-n$.
   - **a.** Exprimer $p_{\text{A}}(\text{R})$ et $p_{\text{B}}(\text{R})$ en fonction de n.
   - **b.** Démontrer que
   $$p(\text{R}) = \frac{-n^2+4n+10}{(4+n)(7-n)}.$$
   - **c.** On sait que n ne prend que six valeurs entières. Déterminer la répartition possible des cinq boules rouges entre les urnes a et b donnant la plus grande valeur possible de $p(\text{R})$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-\text{i}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{\text{i}\}$ par :

$$f(z) = \frac{1-\text{i}z}{z-\text{i}}.$$

1. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C} - \{\text{i}\}$
$$f(z) = -\text{i} + \frac{2}{z-\text{i}}.$$
2. **a.** Démontrer que - i n'a pas d'antécédent par f.
   - **b.** Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.
3. À tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.

   a. Démontrer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 $(\text{A}M \cdot \text{B}M' = 2)$.

   b. Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

4. **a.** Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $z - \text{i}$ soit un nombre réel non nul.

   b. Démontrer que lorsque M décrit E, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.

   c. Lorsque M décrit E, M' décrit-il toute la droite Δ ?

5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Exercice 2 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.

   b. Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

   c. Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

2. **a.** Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m + 5p = 1$.

   b. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5v = 2$.

   c. Démontrer que le couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $42x + 5y = 2$ si, et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.

   d. Déterminer tous les couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

3. Déduire du **2.** les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = -5$.

Problème **9 points**

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 1 cm.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\text{e}^x.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. **a.** Étudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f.

   b. Tracer $\mathcal{C}$.

3. Soit

$$\text{I} = \int_{-3}^{0} f(x)\,\text{d}x.$$

   a. Interpréter graphiquement I.

b. En utilisant l'intégration par parties, calculer

$$\int_{-3}^{0} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x,$$

puis

$$\int_{-3}^{0} x^2\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x.$$

c. En déduire la valeur exacte de I.

Partie B

1. Soit a et b deux nombres réels et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{\left(x^2+ax+b\right)}.$$

Quelles sont les valeurs de a et de b pour lesquelles le tableau de variations de g est celui donné ci-dessous ?

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^{\left(x^2-3x+1\right)}$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère $\mathcal{R}$.

a. Démontrer que la droite D d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est axe de symétrie de Γ.

b. Justifier l'affirmation suivante : « 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ ».

c. Soit α un nombre dont 1,7 est une valeur approchée à 0,5 près. Établir que

$$0,28 \leqslant h(\alpha) \leqslant 0,47.$$

Partie C

Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous (a, b et c étant trois nombres réels).

x	$-\infty$	0		a		b		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$		$\searrow$	c	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Soit v_1, v_2, v_3 les fonctions définies par :

$$v_1(x) = \mathrm{e}^{u(x)} \qquad v_2(x) = u\left(\mathrm{e}^{x}\right) \qquad v_3(x) = u(x)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Déterminer le sens de variation des fonctions v_1 et v_2 (en justifiant votre réponse).

2. Indiquer un intervalle sur lequel il est possible de donner le sens de variation de la fonction v_3 (en justifiant votre réponse).

Baccalauréat S Polynésie septembre 2001

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour tout naturel $n \geqslant 1$ on pose :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
2. Démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n \geqslant 1$ on a :

$$\sqrt{\mathrm{e}} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!} + I_n.$$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n n!}\mathrm{A}.$$

On pourra déterminer A en majorant la fonction :

$$t \longmapsto (1-t)^n \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \quad \text{sur l'intervalle } [0\,;\,1]$$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}.$$

Exercice 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = -1+\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{D}} = 1+\mathrm{i}.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathscr{P}$ - {B} dans $\mathscr{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$$z' = \mathrm{i}\frac{z-2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}.$$

   a. Développer $(z+1-\mathrm{i})(z-1-\mathrm{i})$.

   b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. **a.** Montrer que, pour tout z différent de i,

$$|z'| = \frac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M},$$

   et que, pour tout z différent de i et de 2i,

$$\arg\left(z'\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{B}M},\, \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} 2\pi).$$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg\left(z'\right) = \dfrac{\pi}{2}$ (modulo 2π).

3. **a.** Démontrer que $z' - \text{i} = \dfrac{1}{z - \text{i}}$ et en déduire que $|z' - \text{i}| \times |z - \text{i}| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

b. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

Exercice 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{\text{AD}} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{DB}}$. Déterminer l'affixe z_{E} de E.
2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_{\text{F}} = 6 - \text{i}$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.
3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.

   a. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.

   c. Déterminer les images de C et de D par s.

   d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.

4. **a.** Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$\left\|6\overrightarrow{M\text{A}} - 10\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 9.$$

   b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

Problème **11 points**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 + \cos x)\text{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(\text{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos x\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;4]$.

Partie B

On veut calculer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Montrer que : $\mathscr{A} = 2e - 2 + \displaystyle\int_0^1 \cos t e^{1-t}\,dt$.

2. On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 \cos t e^{1-t}\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \sin t e^{1-t}\,dt$.

   a. À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :

$$I = -\cos 1 + e - J \quad \text{et} \quad J = -\sin 1 + I.$$

   b. En déduire la valeur de I.

3. Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de $\mathscr{A}$ si à 10^{-2} près par défaut.

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1. **a.** Montrer que la fonction h admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

2. **a.** Déterminer $\ln[f(x)]$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   b. Étudier le sens de variations de la fonction H.

   c. Déterminer le tableau de variations de H.

3. On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ.) On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

   a. Étudier la position relative de Γ et de Δ.

   b. Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ.

4. **a.** Établir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de Γ et T.

5. Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

∽ Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 2001 ∽

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$(-1\,;\,0\,;\,2),\quad (3\,;\,2\,;\,-4),\quad (1\,;\,-4\,;\,2),\quad (5\,;\,-2\,;\,4).$$

On considère les points I, J et K définis par : I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD] et $\overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. **a.** Montrer que les points I, J et K ne sont pas alignés.

   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :

   $$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) et montrer que le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants en un point L dont on déterminera les coordonnées.

   d. Montrer que :

   $$\overrightarrow{\text{AL}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}.$$

Partie II

Plus généralement, dans l'espace E, on considère un tétraèdre ABCD ainsi que les points I, J, K et L définis par I est le milieu du segment [AB], K est le milieu du segment [CD].

$$\overrightarrow{\text{AL}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{BJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{BC}}$$

Soit G le barycentre de (A, 3), (B, 3), (C, 1), D, 1).

1. Déterminer les barycentres de (A, 3), (D, 1) et le barycentre de (B, 3), (C, 1).
2. En associant les points A, B, C et D de deux façons différentes, montrer que G appartient aux droites (IK) et (JL). En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 4 cm. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = -\text{i}$ et B le point d'affixe $z_{\text{B}} = -2\text{i}$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, M distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{\text{i}z - 2}{z + \text{i}}$.

1. Démontrer que, si z est un imaginaire pur, $z \neq -\mathrm{i}$, alors z' est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application f.
3. Calculer $\left|z' - \mathrm{i}\right| \times |z + \mathrm{i}|$.
   Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. **a.** Développer $(z+\mathrm{i})^2$, puis factoriser $z^2 + 2\mathrm{i}z - 2$.
   b. Déterminer et repréenter l'ensemble des points M, tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
5. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M, tels que le module de z' soit égal à 1.
   $\left(\text{On pourra remarquer que } z' = \dfrac{\mathrm{i}\left(z - z_{\mathrm{B}}\right)}{z - z_{\mathrm{A}}}.\right)$

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = \left(x^2+2\right)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b. Montrer que d divise n.
   c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.
   b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.
   c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4**)

PROBLÈME **5 points**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \left(x^2 + 4x + 3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; l'unité graphique est 2 cm.

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right) \mathrm{e}^{-x} + 1.$$

1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $(3 - x^2)$ ont le même signe.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $g(0) = 0$. On note α la solution non nulle.

   b. Prouver que $-2,4 < \alpha < -2,3$.
5. En déduire le signe $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B - Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.
4. **a.** Montrer que la droite (D)et la courbe $(\mathscr{C})$ se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.

   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C})$.
5. Construire la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

Partie C - Calculs d'aire

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

   Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction H soit une primitive de la fonction h définie par :

   $$h(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \mathrm{e}^{-x}.$$
2. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).
3. Soit m un réel strictement supérieur à $--1$. On considère le domaine $(\mathscr{D}_m)$ délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = m$.

   a. Calculer l'aire $(\mathscr{A}_m)$ du domaine $(\mathscr{D}_m)$, en unités d'aire.

   b. Déterminer la limite de $(\mathscr{A}_m)$ lorsque m tend vers $+\infty$.

∽ Baccalauréat S Amérique du Sud ∾ décembre 2001

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (unité graphique : 2 cm). On considère la courbe $\mathscr{C}$ dont une représentation pararnétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x = f(t) & \text{où} & f(t) = 2\left(\cos^2 t + \cos t - 1\right) \\ y = g(t) & \text{où} & g(t) = \sin^3 t + \sin t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in [-\pi\ ;\ \pi]$$

On appelle $M(t)$ le point de la courbe $\mathscr{C}$ défini par la valeur t du paramètre.

1. **a.** Étudier les positions relatives de $M(t)$ et $M(-t)$.

   b. Expliquer pourquoi il suffit alors, pour tracer $\mathscr{C}$, d'étudier f et g sur $[0\,;\pi]$.

   Soit $\mathscr{C}'$ la partie de $\mathscr{C}$ correspondante.

2. **a.** Montrer que $f'(t) = -2\sin t(2\cos t + 1)$. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\pi]$.

   b. Montrer que $g'(t) = \cos t\left(3\sin^2 t + 1\right)$. Étudier le signe de g' sur $[0\,;\pi]$.

   c. Dans un même tableau, faire figurer les variations de f et de g sur $[0\,;\pi]$.

3. On veut déterminer l'intersection de $\mathscr{C}'$ et de l'axe des ordonnées.

   a. A l'aide du **2.** montrer que l'équation $f(t) = 0$ a une unique solution dans $[0\,;\pi]$.

   Soit t_0 celle solution.

   b. Donner une valeur approchée de t_0 à 10^{-1} près par défaut.

   c. Déterminer une valeur approchée de $g(t_0)$.

4. Placer les points $M(0)$, $M(t_0)$, $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M(\pi)$.

   Construire les tangentes à $\mathscr{C}'$ parallèles aux axes de coordonnées. Tracer $\mathscr{C}'$ puis en déduire la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 **6 points** (d'après Nathan)

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4} \end{array}\right.$$

1. **a.** Montrer que (u_n) est majorée par 4.

   b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

   c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

   $$4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

   b. Retrouver le résultat du **1 c**.

   c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

   $$v_n = n^2(4 - u_n).$$

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats n'ayant pas pris l'enseignement de spécialité

On considère l'ensemble $E = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$.

Avec deux chiffres distincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment $\boxed{x \mid y}$ ou $\boxed{y \mid x}$.

Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $\boxed{z \mid z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.
2. On tire au hasard un domino.
   - **a.** Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?
   - **b.** Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?
3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.
   Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\dfrac{4}{45}$ ».
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*).

EXERCICE 2 **4 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit n un entier naturel non nul.

On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.
2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

PROBLÈME **10 points.**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-2x}$$

et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A : étude de la fonction *f*

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. **a.** Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : étude d'une tangente

1. On rappelle que f'' désigne la dérivée seconde de f.
   - **a.** Montrer que, pour tout x réel, $f''(x) = 4(2x - 1)\mathrm{e}^{-2x}$.
   - **b.** Résoudre l'équation $f''(x) = 0$.

2. Soit B le point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en B.
3. On veut étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T : pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{\mathrm{e}}x + \frac{3}{\mathrm{e}}\right).$$

   a. Déterminer $g'(x)$ et $g''(x)$.

   b. Étudier le signe de $g''(x)$ suivant les valeurs de x.
   En déduire le sens de variations de g' sur $\mathbb{R}$.

   c. En déduire le signe de $g'(x)$ puis le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

   d. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. Que peut-on en conclure sur la position relative de $\mathscr{C}$ et T ?

4. Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ placer les points A et B puis tracer la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : calculs d'aire et de volume

1. Soit λ un réel strictement positif.
On note A(λ), l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = \lambda$.

   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer A(λ) en fonction de λ.

   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{A}(\lambda)$.

2. **a.** On considère les fonctions h et H définies sur $\mathbb{R}$ respectivenient par :

$$h(x) = (2x+1)^2\mathrm{e}^{-4x} \qquad \text{et} \qquad H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right)\mathrm{e}^{-4x}.$$

   Montrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

   b. On considère le domaine E limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $= -\dfrac{1}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2}$.
   On note V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe des abscisses.
   On rappelle que V, en unités de volume, est exprimé par $\mathrm{V} = \pi \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.
   Déterminer la valeur exacte de V en unités de volume puis une valeur approchée de V à 10^{-3} près.

Baccalauréat S Pondichéry avril 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_{\text{A}} = 1$, et par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_{\text{B}} = 1 + \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $(1 + z_{\text{B}}^2)$.

1. **a.** Montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   b. Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\text{AF}} ; \overrightarrow{\text{AB}}\right)$. Placer le point B.

2. **a.** Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_{\text{B}} - z_{\text{A}})$ et $(z_{\text{E}} - z_{\text{A}})$.

   b. En déduire que les points A , B et E sont alignés.

3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$.
2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z - 1}$ est un réel.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

   a. Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}$

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 euros.

   Pour chaque tirage :

   – si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,

– si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.

3. **a.** Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

PROBLÈME **11 points**

La partie **B** peut être traitée indépendamment de la partie **A**.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; unité graphique : 2 cm. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{\text{e}^x}{\text{e}^{nx}\left(1 + \text{e}^x\right)}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_\backslash$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse seulement aux fonctions f_0 et f_1 correspondant respectivement à $n = 0$ et $n = 1$.

On considère d'abord la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \dfrac{\text{e}^x}{1 + \text{e}^x}$.

1. **a.** Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

b. Déterminer la limite de $f_0(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes de $\mathcal{C}_0$.

2. Montrer que le point K $\left(0~;~\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_0$
3. Étudier les variations de f_0.
4.
   a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_0$ au point K.
   b. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathscr{C}_0$, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $g(x)$, où $g(x) = 2\text{e}^x - x\text{e}^x - 2 - x$.
   c. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
   d. Déterminer, en les justifiant, les signes de $g''(x)$, $g'(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   e. En déduire la position de la tangente T par rapport à la courbe $\mathscr{C}_0$.
5. Tracer $\mathscr{C}_0$ et T dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
6.
   a. Montrer que pour tout réel x, les points $M(x~;~f_0(x))$ et $M'\left(x~;~f_1(x)\right)$ sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
   b. Comment obtient-on $\mathscr{C}_1$ à partir de $\mathscr{C}_0$? Tracer $\mathscr{C}_1$.

Partie B

Étude de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x.$$

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\dfrac{1+\text{e}}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_1 .
3. Montrer que la suite u est positive.
4. On pose $k(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$,
   a. Montrer que, pour tout x réel, $k(x) = \dfrac{1-\text{e}^x}{\text{e}^{nx}\left(1+\text{e}^x\right)}$.
   b. Etudier le signe de $k(x)$ pour $x \in [0~;~1]$.
   c. En déduire que la suite u est décroissante.
5.
   a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$u_{n-1} + u_n = \frac{1-\text{e}^{-(n-1)}}{n-1}.$$
   b. Calculer u_2.
6. Soit v la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 2 par :
   $$v_n = \frac{u_{n-1}+u_n}{2}.$$
   a. Calculer la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.
   b. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$
   c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Baccalauréat S Amérique du Nord juin 2002

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

1. Dans un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.

La réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).

Soit N la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.

a. Donner la loi de probabilité de N.

b. Quelle relation doit exister entre n et p pour que l'espérance mathématique de N soit nulle ?

2. À un concours un candidat doit répondre à un Q.C.M. de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

Partie II

Répondre au Q.C.M. proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

Document à rendre avec la copie

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions.

L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

a. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
180	330	110

b. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(\text{A}) = 0,4 \quad p(\text{B}) = 0,5 \quad p(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 0,35.$$

Combien vaut $p(\text{A} \cap \text{B})$?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,1$	$p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,25$	Les données sont insuffisantes pour répondre.

c. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que $p(\text{B} \cap \text{A}) = \dfrac{1}{6}$, $p_{\text{A}}(\text{B}) = 0,25$ (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé). Combien vaut $p(\text{A})$?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(\text{A}) = \dfrac{2}{3}$	$p(\text{A}) = \dfrac{1}{24}$	$p(\text{A}) = \dfrac{1}{12}$

d. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$\sigma = \frac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+\text{i})z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2+2\text{i}$.
Déterminer les affixes des points A′ et B vérifiant respectivement A′ = F(A) et F(B) = A.

2. Méthode de construction de l'image de M.

a. Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.

b. Établir que pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega - z} = -\text{i}$.
Soit M un point distinct de Ω.
Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.
En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Étude de l'image d'un ensemble de points.

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z+2-2\text{i}| = \sqrt{2}$.
Vérifier que B est un point de Γ.

b. Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

$$z' + 2 = (1+\text{i})(z+2-2\text{i}).$$

Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ‘ de centre A′ et de rayon 2.
Placer O, A, B, A′, Γ et Γ‘ sur une même figure.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.
Exemples d'éléments de (E) : 2 002 ; 3 773 ; 9 119. Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. **a.** Décomposer 1 001 en produit de facteurs premiers.
   b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. **a.** Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
   b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.
   a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a+b$ est divisible par 3 ».
   b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».
4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.
Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.
On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
   Vérifier que le couple (6, 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2\,024 + 44\,k$ où k est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).
   N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :
   2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

PROBLÈME **10 points**
Commun à tous les candidats
Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(x) = \ln(\mathrm{e}^x + kx) - x.$$

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité.
On considère la fonction g définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que pour tout réel a positif ou nul $\ln(1+a) \leqslant a$.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f_1(x) = \ln(\mathrm{e}^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$,
   $f_1(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : Étude et propriétés des fonctions f_k.

1. Calculer $f_k(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$,
   $f_k(x) = \ln\left(1 + k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k, en $+\infty$.
3. **a.** Dresser le tableau de variation de f_k.

   b. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.
4. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_p$ et $\mathscr{C}_m$.
6. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

Partie C : Majoration d'une intégrale.

Soit λ un réel strictement positif, on note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

1. Sans calculer $\mathscr{A}(\lambda)$, montrer que $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant k\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\lambda} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
3. On admet que $\mathscr{A}(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) \leqslant k$.
   Interpréter graphiquement ce résultat

Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.

On appelle G l'évènement suivant : « la chaudière est sous garantie ».

1. Calculer la probabilité des évènement suivants :
   A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
   B : « la chaudière est défectueuse ».
2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.
3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, (unité graphique 2 cm).

On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et -2. Le point K est le milieu du segment [IA].

On appelle $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe $b = \frac{1+4\text{i}}{1-2\text{i}}$. Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
2. Soit D le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{KI}}, \overrightarrow{\text{KD}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif et soit d l'affixe de D.
   a. Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$? Donner un argument de $d + \frac{1}{2}$.
   b. En déduire que $d = \frac{1}{4} + 3\text{i}\frac{\sqrt{3}}{4}$.
   c. Déterminer un réel a vérifiant l'égalité $\frac{1+2\text{i}a}{1-\text{i}a} = \frac{1}{4} + 3\text{i}\frac{\sqrt{3}}{4}$.
3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2\text{i}x}{1-\text{i}x}$. On pose $Z = \frac{(m-1)}{(m+2)}$. Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.

4. Soit N un point, différent de A du cercle ($\mathscr{C}$) et n son affixe.
Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \dfrac{1+2\mathrm{i}y}{1-\mathrm{i}y}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité
Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\mathrm{OI}},\ \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ (unité graphique 4 cm)

1. On considère les points A, B , C , D et E d'affixes respectives :

$$Z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}},\ Z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}},\ Z_{\mathrm{C}} = -1,\ Z_{\mathrm{D}} = -\mathrm{i} \text{ et } Z_{\mathrm{E}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

   a. Faire la figure
   b. Montrer que EA = ED et que EB = EC. Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC]
   c. Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. Placer les points K et L sur la figure.
2. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $Z' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z}$ où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z.
   a. Justifier l'égalité $F = R \circ S$ où S est la réflexion ou symétrie axiale d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
   b. Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.
3. Soit G l'application qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M'' dont l'affixe Z'' définie par la formule $Z'' = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z} + 1$.
Déterminer une application T telle que $G = T \circ F$. En déduire que G est un antidéplacement.

PROBLÈME **11 points**
Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x}$$

Partie A - Étude de f_0 et de f_1

On appelle f_0 la fonction définie par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
On appelle $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ les courbes représentatives respectivement de f_0 et de f_1 dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 5 cm).

1. Déterminer la limite de f_0 en $-\infty$ puis en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_0 et étudier son sens de variation.
3. Montrer que le point $\mathrm{I}\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_0$.
4. Déterminer une équation de la tangente en I à $\mathscr{C}_0$.
5. Montrer que pour tout réel x, $f_1(-x) = f_0(x)$.
6. par quelle transformation simple $\mathscr{C}_1$ est-elle l'image de $\mathscr{C}_0$? Construire $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

Partie B Calcul d'une aire

1. Montrer que pour tout réel x, $f_0(x) + f_1(x) = 1$.
2. Soit a un réel positif ou nul. Calculer $\displaystyle\int_0^a f_0(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^a f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire l'aire $\mathscr{A}(a)$ de la partie du plan définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & \leqslant x \leqslant & a \\ f_1(x) & \leqslant y \leqslant & 1 \end{array}\right.$$

4. Déterminer la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Partie C Étude d'une suite

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_0 et u_1
2. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\mathrm{e}^n - 1}{\mathrm{e}^n}$.
3. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_{n+1} + u_n$.
4. Montrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$

$$\frac{\mathrm{e}^{(1-n)x}}{1+\mathrm{e}^x} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^x}.$$

5. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis la limite de (u_n).

∾ Baccalauréat S Asie juin 2002 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement « Amélie est arrêtée par le n^{e} feu rouge ou orange » et $\overline{\mathrm{E}_n}$, l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

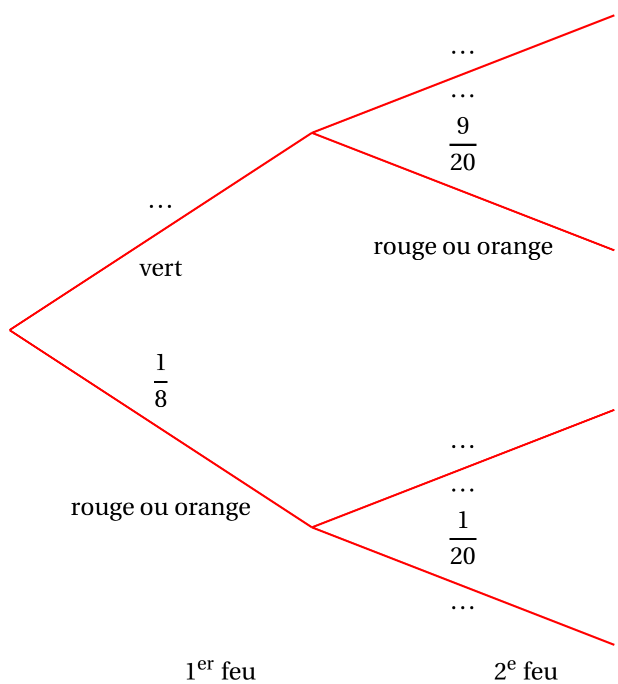
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}_n}$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\dfrac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est rouge ou orange, vaut $\dfrac{1}{20}$.
- la probabilité que le $(n+1)^{\text{e}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est vert, est égale à $\dfrac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{E}_n}(\mathrm{E}_{n+1})$ et $p_{\overline{\mathrm{E}_n}}(\mathrm{E}_{n+1})$.

b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup \left(E_{n+1} \cap \overline{E}_n\right)$, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n.$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, $-2+3\text{i}$ et $1-\text{i}$.

a. Placer les points A, B, C et D dans le plan.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2. On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2 - (1+3\text{i})z - 6 + 9\text{i} = 0 \ \ (1) \quad \text{et} \quad z^2 - (1+3\text{i})z + 4 + 4\text{i} = 0 \ \ (2)$$

a. Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1, et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.

b. Développer $(z-3)(z+2-3\text{i})$, puis $(z-4\text{i})(z-1+\text{i})$.

c. En déduire les solutions de l'équation :

$$\left(z^2 - (1+3\text{i})z - 6 + 9\text{i}\right)\left(z^2 - (1+3\text{i})z + 4 + 4\text{i}\right) = 0.$$

d. Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.

e. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y = x$.

3. On appelle f l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - (1+3\text{i})z - 6 + 9\text{i}.$$

a. On pose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{array}\right., \ n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $\left(x_n,\ y_n\right)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x-y+3=0$. En déduire que $x_{n+1}=4x_n+2$.
2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.
3. Montrer que :

   a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

   b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.
4. **a.** Montrer, par récurrence, que $x_n=\dfrac{1}{3}\left(4^n\times 5-2\right)$.

   b. En déduire que $4^n\times 5-2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

PROBLÈME **10 points**

Partie 1

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^*$ par

$$u(x)=2x^3-1+2\ln|x|.$$

1. Étudier les variations de la fonction u sur $\mathbb{R}^*$. Préciser la valeur de l'extremum relatif de u.
2. Étudier les limites de u en 0, et en $+\infty$.
3. On considère l'équation $u(x)=0$.

   a. Montrer qu'elle n'admet qu'une seule solution sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$ et en déduire qu'elle est la seule sur $\mathbb{R}^*$; cette solution sera notée α.

   b. Donner un encadrement de α par deux nombres rationnels de la forme $\dfrac{n}{10}$ et $\dfrac{n+1}{10}$, avec n entier.
4. En déduire le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Partie 2

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x)=2x-\frac{\ln|x|}{x^2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en 0, en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Pour tout x réel, déterminer le nombre dérivé $f'(x)$.
3. En utilisant les résultats déjà établis, donner les variations de la fonction f et le tableau de variations de f.
4. **a.** Démontrer que $f(\alpha)=3\alpha-\dfrac{1}{2\alpha^2}$.

   b. En utilisant l'encadrement de α trouvé à la **partie 1 3**, prouver que $1,6<f(\alpha)<2,1$.

   La construction de $\mathscr{C}$ n'est pas demandée.

Partie 3

Soit M le point de coordonnées $(x,\ y)$ et M' le point de coordonnées $(x',\ y')$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, où M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

2. **a.** Démontrer qu'une équation de la courbe Γ à laquelle appartient M' lorsque M décrit la courbe $\mathscr{C}$ est la suivante : $y = -2x - \dfrac{\ln|x|}{x^2}$.

b. Étudier la position relative des courbes Γ et $\mathscr{C}$.

Partie 4

On considère un réel m supérieur ou égal à 1.

1. On note $A(m)$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^m \left[2x - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$. Calculer $A(m)$. (On utilisera une intégration par parties.)

2. Déterminer, si elle existe, la limite de $A(m)$ quand m tend vers $+\infty$.

∽ Baccalauréat S Centres étrangers1 juin 2002 ∽

Calculatrice autorisée

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} & = & \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{array}\right.$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.

 a. Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.

 b. Déterminer la limite de la suite w.

2. **a.** Montrer que la suite u est croissante.

 b. Montrer que la suite v est décroissante.

 c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

3. On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera l.

4. On appelle t la suite définie pour tout entier natureI n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.

 a. Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.

 b. Déterminer alors la valeur de l.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\text{i}}{2}$.

$\mathscr{T}$ est l'application qui, à tout point M, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$2zz' = \text{i}(z + z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_{\text{I}} = 1$, $z_{\text{J}} = \text{i}$. Soit K le milieu du segment [IJ].

 a. Déterminer l'affixe z_{K} de K.

 b. Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathscr{T}$.

 c. En déduire que $\mathscr{T}$ ne conserve pas les milieux.

2. Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.

3. Montrer que $M' = \mathscr{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \dfrac{\text{i}}{2}\right)\left(z - \dfrac{\text{i}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

4. En déduire l'image par $\mathscr{T}$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

Exercice 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\textbf{E} : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.
   On suppose désormais $p \neq 2$ et que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation **E**.
2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
   a. Montrer que x et y sont de parités différentes.
   b. Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
   c. En déduire que x et y sont premiers entre eux.
3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
   a. Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|\ ;\ 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.
   b. Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.
4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.
   a. $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
   b. Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

PROBLÈME **11 points**

Pour chaque entier naturel n, on définit, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction notée f_n par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} + n\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A : Étude du cas particulier $n = 0$

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f_0(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0.
2. Résolution graphique d'une inéquation :
   a. Justifier graphiquement l'inégalité suivante :
   $$\text{pour tout réel } u,\ \mathrm{e}^u \geqslant u + 1.$$
   b. En déduire que pour tout réel x,
   $$\mathrm{e}^{-x} + x - 1 \geqslant 0, \text{ puis que, } 1 + (x-1)\mathrm{e}^x \geqslant 0.$$
3. Limites :
   a. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de f_0 en 0.
4. Sens de variations :
   a. Montrer que, pour tout réel x appartenantà l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ on a $f_0'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)+1}{x^2}$.
   b. En déduire le sens de variation de f_0.

5. On appelle $\mathscr{C}_0$ la courbe représentative de f_0 dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ pour lequel l'unité graphique est 2 cm.
   Tracer $\mathscr{C}_0$ dans ce repère et placer le point A de coordonnées $(0\,;1)$.

Partie B : Étude de la famille de fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ précédent.

1. Déterminer le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.
   En déduire que $\mathscr{C}_n$ possède une asymptote qu'on précisera.
3. Étudier les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_n$.
4. Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées.
5. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel α_1, appartenant à l'intervalle $[0{,}2\,;\,0{,}9]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$.
   b. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$.
   c. Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1\,;\,1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
6. **a.** En utilisant la **partie A** montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;1]$,
   $$\frac{\text{e}^x - 1}{x} \leqslant \text{e} - 1.$$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\alpha_n) \leqslant \dfrac{1-\text{e}}{n}$, puis que, $\alpha_n \geqslant \text{e}^{\frac{1-\text{e}}{n}}$.
   c. Déterminer la limite de la suite (α_n).
7. Construire sur le graphique précédent, les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$.

Partie C : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on appelle I_n l'intégrale

$$\text{I}_n = \int_1^{\frac{3}{2}} f_n(x)\,\text{d}x.$$

1. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.
2. Étudier le sens de variation de la suite (I_n).
3. Démontrer que l'aire comprise entre les courbes $\mathscr{C}_{n+1}$, et $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{2}$ est constante.

∽ Baccalauréat S France juin 2002 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

   On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

   Soit $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives $(a,\ -5,\ 1-a)$ et $(1+b,\ 1,\ b)$.

   Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

   Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

   Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

   Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

   Pour tout entier n, on désigne par :

   A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie »,

   B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie »,

   C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie »

   a. Calculer les probabilités $p(\text{A}_1)$, $p(\text{B}_1)$ et $p(\text{C}_1)$.

   b. Exprimer $p(\text{C}_{n+1})$ en fonction de $p(\text{C}_n)$ et montrer que $p(\text{C}_n) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

   Exprimer $p(\text{A}_{n+1})$ en fonction de $p(\text{C}_n$ et en déduire que $p(\text{A}_n) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. **a.** Déterminer la limite de $p(\text{A}_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

   b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(\text{A}_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spéécialité

Le plan complexe est rapporté àun repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$[unité graphique : 2 cm].

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

   On pose $a = \sqrt{3}+\text{i}$ et $b = \sqrt{3}-\text{i}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2. **a.** Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

   b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle $OA'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

   a. Justifier les égalités suivantes :

   $$c\bar{c} = R^2 \qquad (c-2\mathrm{i})(\bar{c}+2\mathrm{i}) = R^2 \qquad \left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right) = R^2.$$

   b. En déduire que $c-\bar{c} = 2\mathrm{i}$ puis, que $c+\bar{c} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

   c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère l'équation

   $$(\mathrm{E})\ :\ 6x+7y = 57$$

   où x et y sont des entiers relatifs.

   a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $6u+7v = 1$; en déduire une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de l'équation (E).

   b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
   On considère le plan (P) d'équation : $6x+7y+8z = 57$.
   On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées $x,\ y$ et z sont des entiers naturels.

   a. Montrer que l'entier y est impair.

   b. On pose $y = 2p+1$ où p est un entier naturel.
   Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1.

   c. On pose $p+z = 3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels $x,\ p$ et q vérifient la relation : $x+p+4q = 7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

   d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

PROBLÈME **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(x+(1-x)\mathrm{e}^{2x}\right].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique 2 cm)

1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
   Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + (1-2x)\text{e}^{2x}$.

   a. Étudier le sens de variation de u.
   Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ,\ 1]$.
   Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

   b. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

Partie B

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, on considère la courbe Γ d'équation $y = \text{e}^x$ et la droite D d'équation $y = x$. Les courbes Γ et D sont tracées sur la feuille annexe.

1. Soit t un réel ; on désigne par M, le point de Γ d'abscisse t.
   La tangente à Γ au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.
   Déterminer les coordonnées du point N_t.
2. On désigne par P_t le point de D d'abscisse t et par G_t l'isobarycentre des points 0, M_t, P_t et N_t. Le point G_t est donc le barycentre des points pondérés $(0\,;1)$, $(M_t\ ;\ 1)$, $(P_t\ ;\ 1)$ et $(N_t\ ;\ 1)$.

   a. Placer les points M_{-2}, P_{-2}, et N_{-2} puis construire, en justifiant, le point G_{-2} sur la feuille annexe.

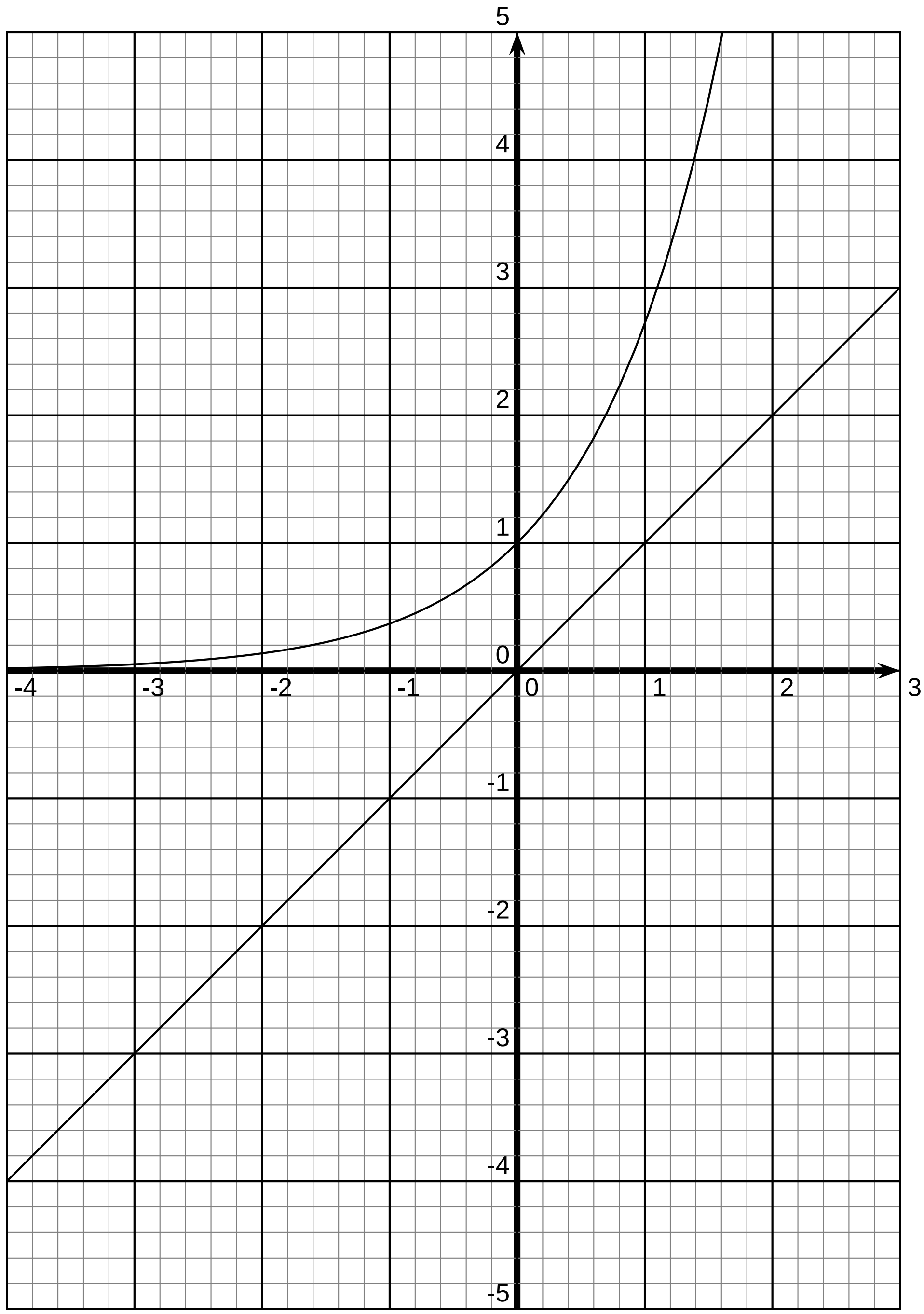
   b. Déterminer en fonction de t les coordonnées du point G_t.

3. Quel est l'ensemble des points G_t quand t décrit $\mathbb{R}$?

Partie C

1. Construire la courbe $\mathcal{C}$ de la **partie A** sur la feuille annexe.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

Annexe problème



Baccalauréat S La Réunion juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\frac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(\text{A})$. On désigne par $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A.

La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p(\text{A}/\text{B})$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
   soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
   soit P l'évènement : « on obtient PILE » .
   a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).
   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?
2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
   – si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
   – dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.
   On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».
   a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?
   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?
   c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^3 - 3z^2 + 3z$.

1. On considère les points B et C d'affixes respectives i et $\text{i}\sqrt{3}$.
   Calculer les affixes des points images de O, B et C par f. Placer les points B, C et leurs images B$'$ et C$'$ sur une figure. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?
2. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation
   $$z^3 - 3z^2 + 2z = 0.$$
   En déduire que f possède trois points invariants, dont on déterminera les affixes.

3. a. Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$z' - 1 = (z-1)^3.$$

b. Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z-1$ et α un argument de $z-1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z'-1$ en fonction de r et de α.

Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{A}M'}\right)$ et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

c. Montrer que si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient à un cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.

4. Montrer que, si M appartient à une demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B, alors M' appartient à une demi-droite D$'$'que l'on déterminera.

Justifier l'appartenance du point B$'$ à Γ' et à D$'$.

Compléter la figure avec les différents éléments : Γ, Γ', D et D$'$.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\text{i}\overline{z}$.

a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ d'affixe 1 - i.

b. Soit D$'$ la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D$'$.

Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}\right)$. Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.

c. Déterminer l'écriture complexe de r.

2. Dans cette question un considére l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}\text{i}\overline{z} = \dfrac{z+z'}{2}$.

a. Soit le point A d'affixe $z = 2+\text{i}$, déterminer l'affixe du point A_1 image de A par p.

b. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.

c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.

3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.

Construire l'image A$'$ du point A par f.

Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ, que l'on déterminera.

Problème **11 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentalive de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Étudier la parité de f. Que peut-on en déduire comme propriété géométrique pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Étudier la limite de f en $+\infty$ et les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O\,; \vec{\imath}, vect\jmath\right)$.

Partie B

On considère le point A du plan de coordonnées (1 ; 0) et on s'intéresse au minimum de la distance AM où M est un point de la courbe $\mathscr{C}$.

1. M étant un point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$, calculer en fonction de x la distance AM.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x-1)^2 + \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}{2}.$$

   a. Calculer $g'(x)$.

   b. On désigne par g'' la fonction dérivée seconde de g. Calculer $g''(x)$.
   Montrer que pour tout x réel : :

$$g''(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 2.$$

   c. En déduire les variations de g' sur $\mathbb{R}$.

   d. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $[0\,; 1]$ vérifiant $g'(\alpha) = 0$.
   Vérifier l'inégalité suivante : $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$.
   Déterminer le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x.

   e. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$). Quel est le minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction g ?

3. Établir que la distance AM est minimum au point M_α d'abscisse α de la courbe $\mathscr{C}$.
   Placer le point M_α sur le graphique.
4. En utilisant la définition de α, montrer les égalités :

$$\alpha - 1 = -\frac{1}{2} f(2\alpha)$$

   puis :

$$g(\alpha) = \frac{1}{4}\left[f(2\alpha)\right]^2 + \left[f(\alpha)\right]^2.$$

   Utiliser les variations de f et le résultat suivant, $0,46 \leqslant \alpha \leqslant 0,47$ pour encadrer $g(\alpha)$; en déduire un encadrement de la distance AM_α d'amplitude 2.10^{-2}.

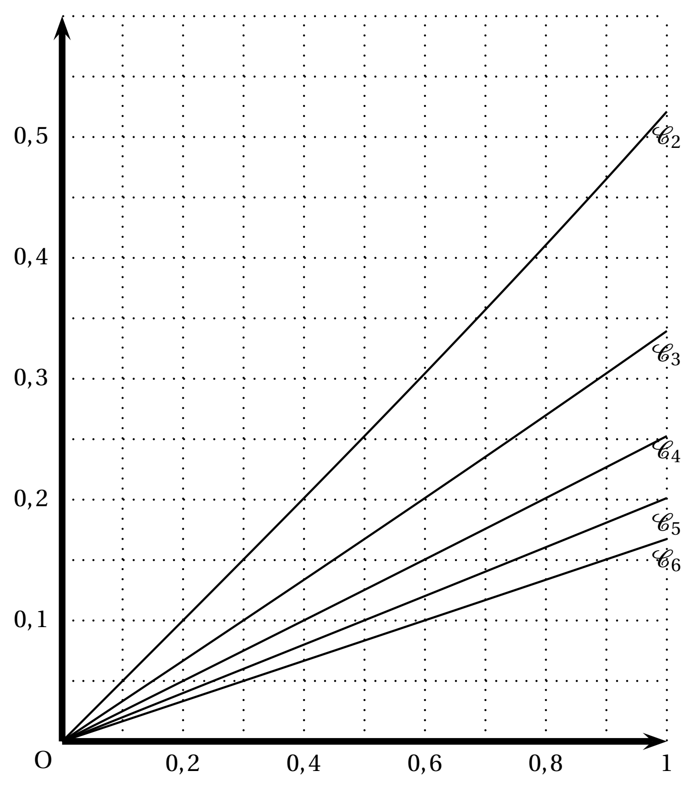
Partie C

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}}{2}.$$

On appelle $\mathscr{C}_n$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f_2, f_3, f_4, f_5, et f_6 soit respectivement les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$, $\mathscr{C}_5$ et $\mathscr{C}_6$ obtenues à l'aide d'un logiciel.

1. Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^1 f_1 \, dx$.
2. On considère pour n entier naturel non nul l'intégrale $I_n = \int_0^1 f_n \, dx$.
   Interpréter géométriquement I_n.
   Calculer pour n entier naturel quelconque, I_n en fonction de n.
3. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (I_n) ?
   Montrer que $I_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)} - \dfrac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]$ et en déduire la limite de la suite (I_n) en $+\infty$.

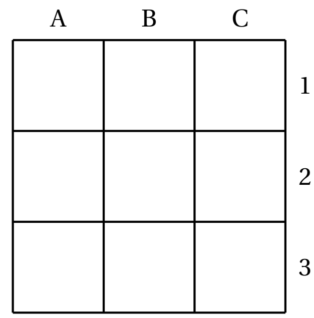


Baccalauréat S Polynésie juin 2002

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

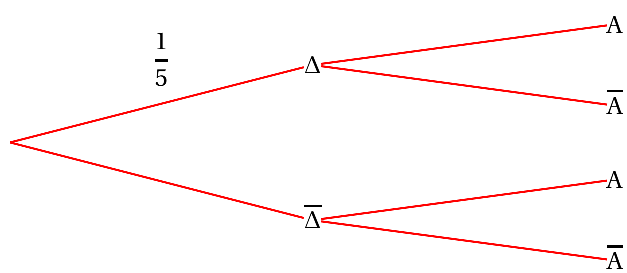


On note les évènements suivants :
- H : « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
- V : « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
- D : « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
- N : « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D.
   En déduire que la probabilité de N est égale à $\dfrac{19}{21}$.
2. On considère la variable aléatoire X définie par :
   - $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
   - $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
   - $X = -2$, lorsque N est réalisé.

   Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.
3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.
   On note Δ l'évènement : « la machine M_1 est déréglée ».
   a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p_\Delta(\text{H})$, puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_\Delta(\text{V})$, d'avoir un alignement en diagonale $p_\Delta(\text{D})$.
   b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\dfrac{3}{28}$.
4. A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \dfrac{1}{5}$. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



EXERCICE 2 **4 points**

Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 2 cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1.

Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$.

1. Déterminer les points invariants par f.

2. Soit C le point d'affixe $2\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)$.
Montrer que C$'$ est le milieu du segment [OC].

3. **a.** Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)$.

b. En déduire :
– la valeur de $\text{A}M_1 \cdot \text{B}M'$,
– une expression de $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{B}M'}\right)$ en fonction de $\left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{A}M_1}\right)$.

c. Justifier les relations :

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{A}M \cdot \text{B}M' = 6 \\ (2) & \left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{\text{A}M}\right). \end{array}$$

d. Application : construire l'image D$'$ du point D d'affixe $2+2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{array}{rcl} a & = & n^3+2n^2-3n \\ b & = & 2n^2-n-1 \end{array}$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

4. **a.** On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c. Application :
Déterminer Δ pour $n = 2\,001$;
Déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

PROBLÈME **15 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x}$$

et l'on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité 3 cm.

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$?
2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f pour x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique u. Montrer que u appartient à $[1\ ;\ 2]$ et déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u.
5. Tracer (T) et $(\mathscr{C})$ sur la même figure.
6. **a.** Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x-1}{x+1} = a + \dfrac{b}{x+1}$.

   b. En déduire l'aire en cm^2 du domaine plan limité par (T), $(\mathscr{C})$ et la droite d'équation $x = 1$ (on admettra que T est au-dessus de $(\mathscr{C})$).

Partie B

n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f_n'(x)$ et donner son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

   Dresser le tableau de variations de f_n.
2. **a.** Calculer $f_n(n)$; quel est son signe ?

   b. Démontrer, par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$.
   En déduire le signe de $f_n(n+1)$.

   c. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\ ;\ n+1]$; cette solution sera notée u_n
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.
4. **a.** En remarquant que, pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$: $\dfrac{x-n}{x+n} = 1 - \dfrac{2n}{x+n}$, montrer que la valeur moyenne, M_n de f_n sur $[0\ ;\ u_n]$ est égale à :

   $$1 - \frac{1}{u_n} + \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{u_n} - 2\left(\frac{n}{u_n}\right)\ln\left(\frac{u_n}{n} + 1\right)$$

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M_n$.