Baccalauréat S 2012

L'intégrale de mars à novembre 2012

Pour un accès direct cliquez sur les liens bleus

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie Série obligatoire mars 2012

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.
On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{J}} = \mathrm{i}\sqrt{2} \quad \text{et } z_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = -1 + \mathrm{i}$. On considère !a rotation r de centre O qui transforme J en D.

a. Déterminer une mesure de l'angle de la rotation r.

b. Soit C l'image du point L par la rotation r. Déterminer l'affixe du point C.

5. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. **a.** Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.
   b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
   c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.
2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
   b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
   c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

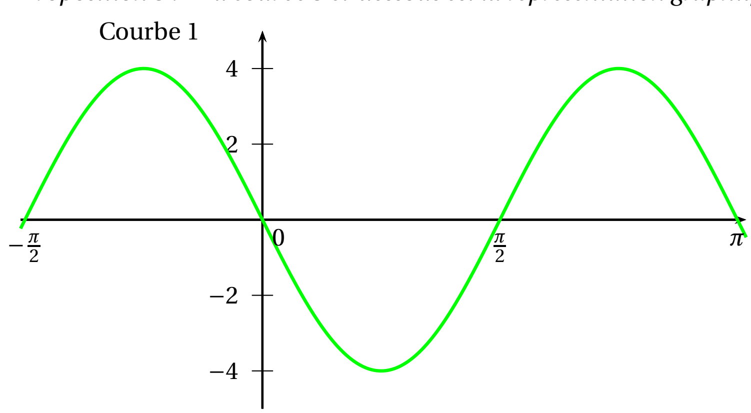
Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».
À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

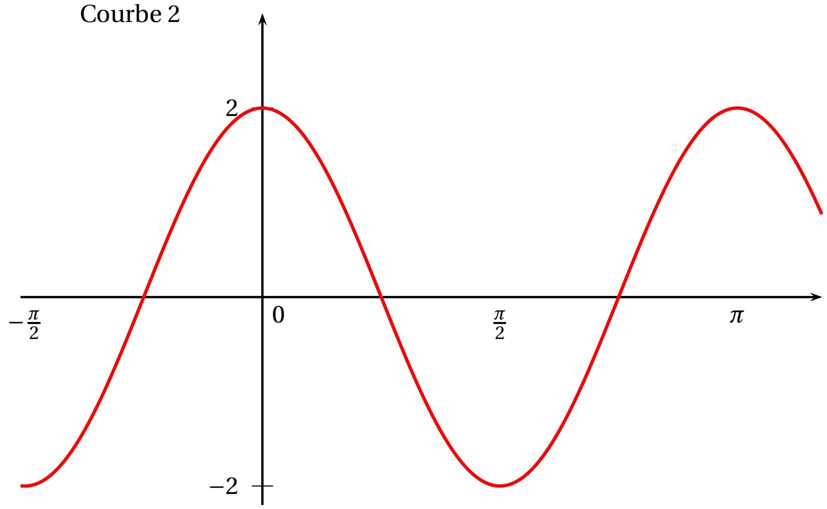
EXERCICE 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

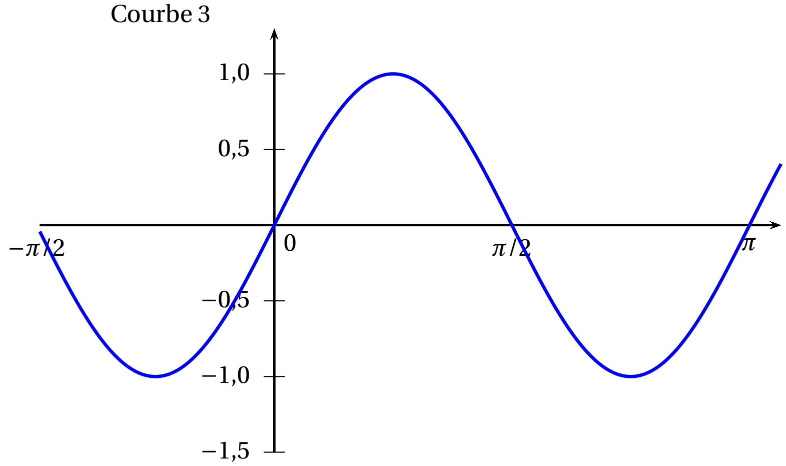
VRAI ou FAUX ?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. **Énoncé 1 :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.
   Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.
   Proposition 1 *: « On peut choisir la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$. »*
2. **Énoncé 2 :** Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}n\pi}{3}}$.
   Proposition 2 *: « Les points* O*, M_1 et M_{20} sont alignés. »*
3. **Énoncé 3 :** On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.
   Proposition 3 *: « La courbe* 3 *ci-dessous est la représentation graphique de f ».*





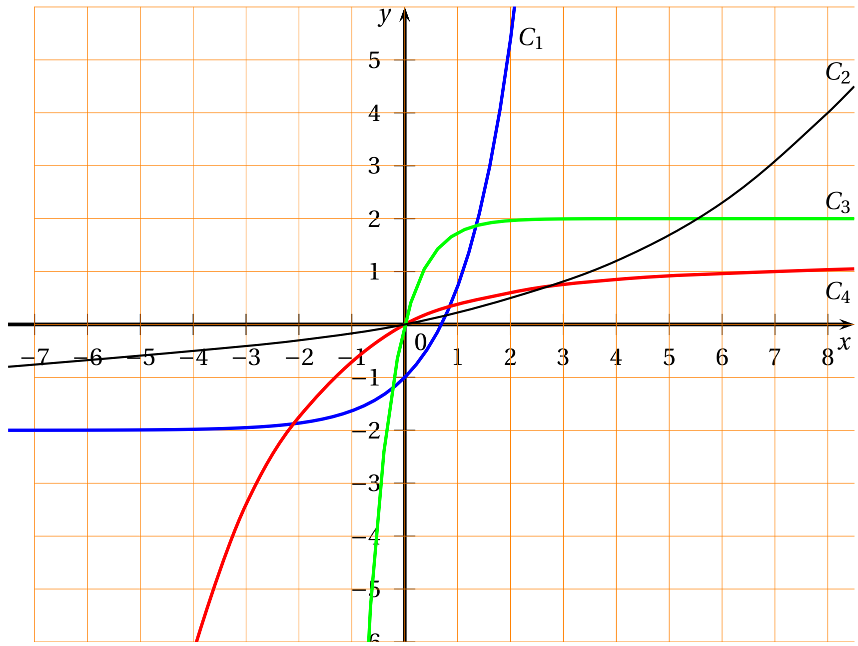


4. **Énoncé 4 :** On considère, dans un repère orthonormé de l'espace, le point A(0 ; 0 ; 3) et le plan P d'équation $2x - y + z = 0$.

   Proposition 4 : « La sphère de centre A *et de rayon* 2 *et le plan* P *sont sécants. »*

5. **Énoncé 5 :** On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

   Proposition 5 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ *est la courbe* C_4*. »*



EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Sur la courbe $\mathscr{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments [OA] et [AB]. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments [OA] et [AB] et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points A$'(a\,;\,0)$ et B$'(1\,;\,0)$.
Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 1$.

2. **a.** Donner l'aire du triangle OAA$'$ et montrer que l'aire du trapèze ABB$'$A$'$ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2\mathrm{e}^{a} + a\mathrm{e}^{a} - a\mathrm{e} + \mathrm{e}\right)$.

b. En déduire que l' aire de la partie du plan hachurée est égale à $\dfrac{1}{2}\left(a\mathrm{e}^{a} - a\mathrm{e} + \mathrm{e} - 2\right)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}\right) + \mathrm{e} - 2.$$

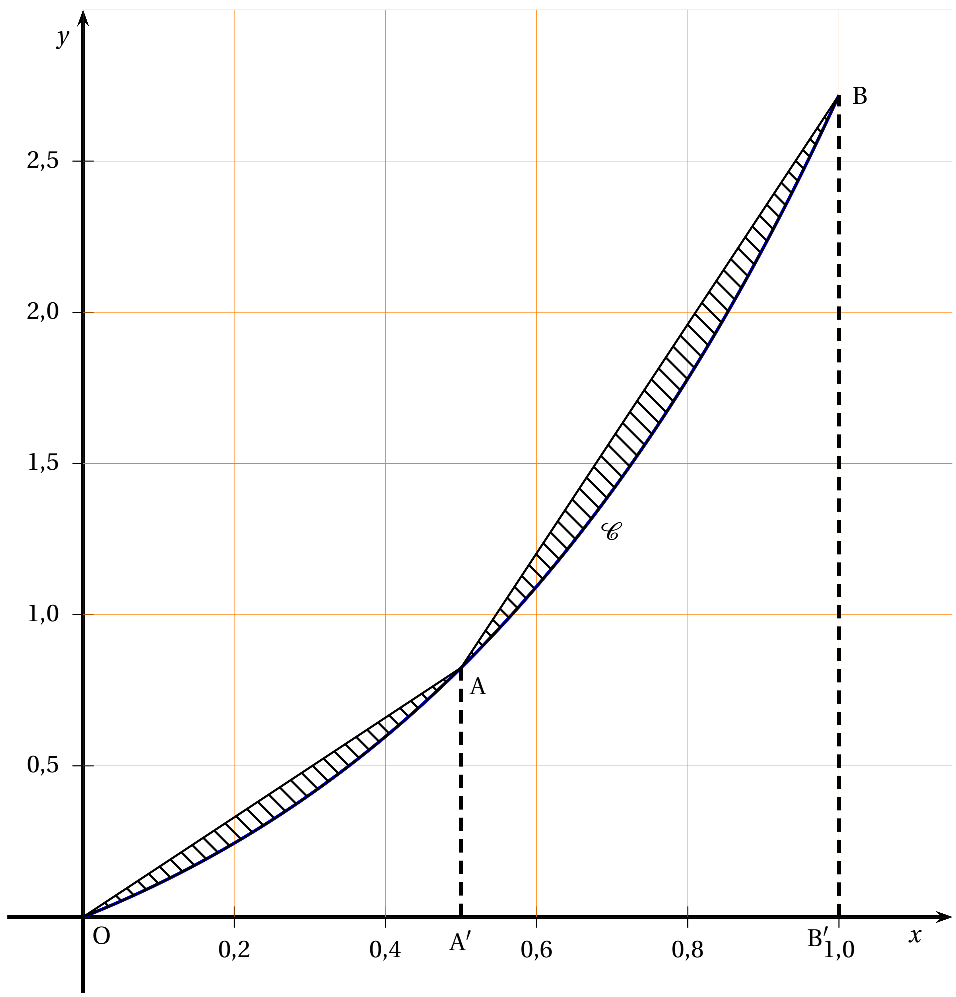
1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g''(x) = (2 + x)\mathrm{e}^{x}$.

2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.

Annexe

CETTE PAGE N'EST PAS À RENDRE AVEC LA COPIE



Baccalauréat S Pondichéry 18 avril 2012

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

   a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
   - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - il n'a pas été contrôlé ;
   - il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.
On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

- les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations :

$$\mathcal{P} : x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x + y + 3z = 0.$$

- la droite $\mathcal{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -3-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Proposition 2
La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathcal{P}$.
Proposition 3
L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1-t' \\ y & = & -1-2t' \\ z & = & t' \end{array}\right. \qquad t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4
Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont coplanaires.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

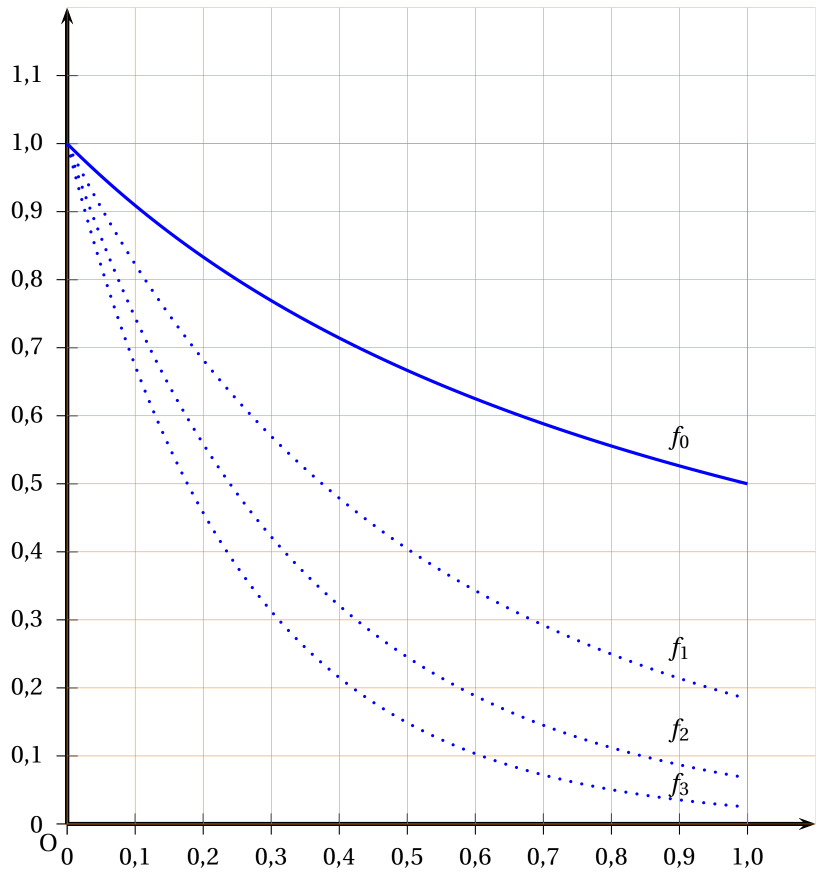
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\text{e}^{-nx}}{1+x}\,\text{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{\text{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\text{d}x.$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n :



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2. **a.** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. **a.** Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} - J_n\right).$$

b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.
Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = -2+\mathrm{i}$.
   a. Calculer l'affixe $z_{\mathrm{C}'}$ du point C′ image de C par la transformation f, et placer les points C et C′ dans le repère donné en annexe.
   b. Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   c. Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D′ par la transformation f.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissance

Soit a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.
Montrer que si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Partie B Inverse de 23 modulo 26

On considère l'équation

$$(E) : \quad 23x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-9\,;\,-8)$ est solution de l'équation (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire un entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $23a \equiv 1 \pmod{26}$.

Partie C Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

Étape 1 Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers $(x_1 \,;\, x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 $(x_1 \,;\, x_2)$ est transformé en $\left(y_1 \,;\, y_2\right)$ tel que :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcll} y_1 & \equiv & 11x_1+3x_2 & \pmod{26}\\ y_2 & \equiv & 7x_1+4x_2 & \pmod{26}\end{array}\right. \quad \text{avec } 0 \leqslant y_1 \leqslant 25 \text{ et } 0 \leqslant y_2 \leqslant 25.$$

Étape 3 $\left(y_1 \,;\, y_2\right)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple : $\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \overset{\text{étape1}}{\Longrightarrow} (19,4) \overset{\text{étape 2}}{\Longrightarrow} (13,19) \overset{\text{étape 3}}{\Longrightarrow} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$

1. Coder le mot ST.

2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :

a. Montrer que tout couple $(x_1 \,;\, x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{lcll} 23x_1 & \equiv & 4y_1+23y_2 & \pmod{26}\\ 23x_2 & \equiv & 19y_1+11y_2 & \pmod{26}\end{array}\right.$$

b. À l'aide de la partie B, montrer que tout couple $(x_1 \,;\, x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système

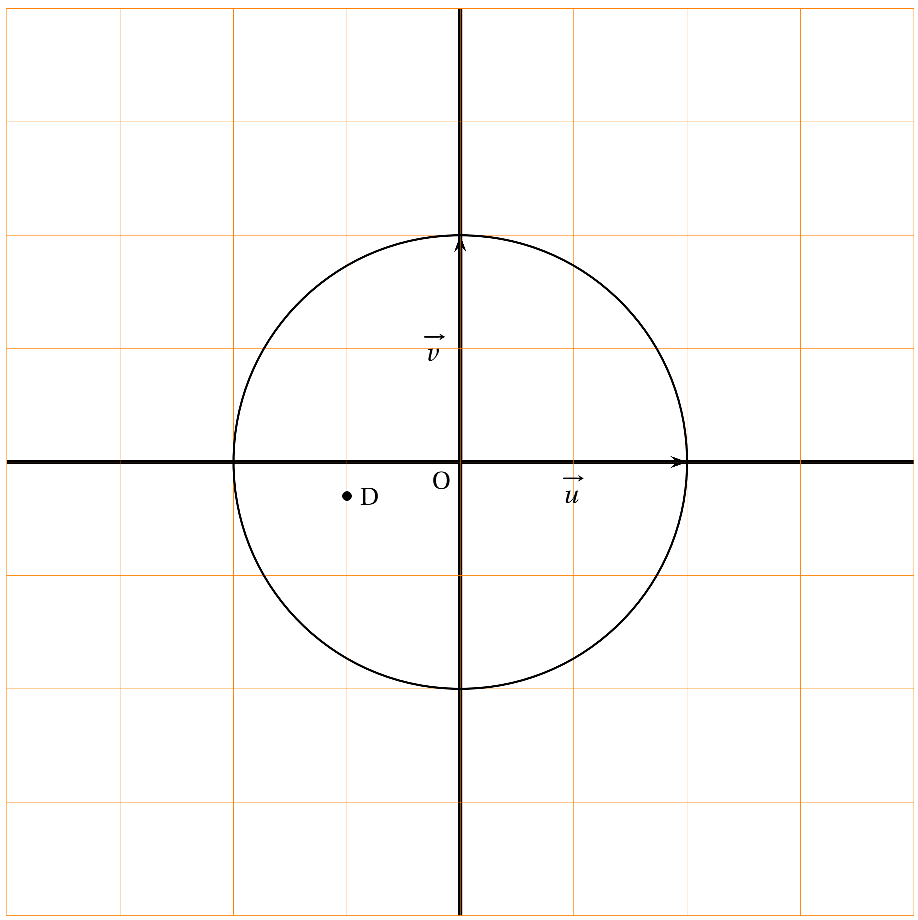
$$(S_3)\left\{\begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & 16y_1+y_2 & \pmod{26}\\ x_2 & \equiv & 11y_1+5y_2 & \pmod{26}\end{array}\right.$$

c. Montrer que tout couple $(x_1 \,;\, x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du système (S_1)

d. Décoder le mot **YJ**.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 4



Baccalauréat S Amérique du Nord 31 mai 2012

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
– F l'évènement « le membre choisi est une femme »,
– T l'évènement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $\frac{2}{5}$.
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
   Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
   a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   b. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
   Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
   c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$.
2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
   Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
   On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.
   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 2 **5 points**
Restitution organisée des connaissances
On rappelle que $\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.
Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1~;~+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1~;~+\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout x de $[1~;~+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1~;~+\infty[$.

c. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

d. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0~;~1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0~;~1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f.

Partie A

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0~;~1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.

b. Montrer que, pour tout x de $\left[0~;~\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$, en déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Montrer que, pour tout x de $[0~;~1]$, $0 \leq f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leqslant \frac{\pi}{4(n+1)}$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},~\vec{u},~\vec{v}\right)$.
On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.
On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

a. Exprimer a sous forme exponentielle.

b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.

3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω.
   a. À l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = 0$ et $z \neq 1$.
   b. Montrer que $z^2 - \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = (z-1)(z+1-\mathrm{i})$.
   c. En déduire l'ensemble Γ_3.
5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.
   a. Exprimer $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right)$ en fonction d'un argument de z.
   b. En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit S la transformation du plan qui, à tout M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = 5\mathrm{i}z + 6\mathrm{i} + 4.$$

Partie A

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.
2. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z'.
   Démontrer que :
$$\begin{cases} x' &= -5y+4 \\ y' &= 5x+6 \end{cases}$$

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que $-3 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant 5$.
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble de ces points M.
On rappelle que les coordonnées $(x'\,;\,y')$ du point M', image du point M par la transformation S, sont $x' = -5y+4$ et $y' = 5x+6$.

1. **a.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(a\,;\,b)$ tels que $4a + 3b = 5$.
   b. En déduire l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $-3x' + 4y' = 37$.
2. Soit M un point de l'ensemble $\mathscr{E}$ et M' son image par la transformation S.
   a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.
   b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.
   En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.
   c. Déterminer l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.

Baccalauréat S Liban mai 2012

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.
   étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.
3. Justifier que $f'(x)$ a màªme signe que $g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. **a.** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties.
   b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats.

Les quatre questions sont indépendantes.
Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t \\ y &=& 6+2t \\ z &=& 4-t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 8+5t' \\ y &=& 2-2t' \\ z &=& 6+t' \end{array}\right. , \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(12~;~7~;~-13)$ et $B(3~;~1~;~2)$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x+2y-5z=1$.

Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

3. On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$$

Affirmation : ces deux suites sont adjacentes.

4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+2}, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Affirmation : cette suite est majorée par 3.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'une U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les événements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** *où une valeur arrondie à* 10^{-2} *suffit.*

1. Calculer $P_{J_1}(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement J_1 est réalisé.
Calculer de même la probabilité $P_{J_2}(B)$.
On admet dans la suite les résultats suivants :

$$P_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{1}{210}$$

2. Montrer que $P(B)$, probabilité de l'événement B, vaut $\frac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?

b. Calculer la probabilité de l'événement $(N = 3)$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. **Un triangle**
   - **a.** On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

     Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
   - **b.** En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. **Une transformation du plan**

   On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_O = 0$, et telle que :

   $$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

   Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   - **a.** Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

     $$3 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2\mathrm{i}\sqrt{3}$$

     On remarquera que : $A_1 = 1$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.
   - **b.** Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.
   - **c.** établir que pour tout entier naturel n, on a :

     $$z_{n+1} - \omega = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega),$$

     où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1. b)**.
   - **d.** En déduire que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une transformation dont on précisera les éléments caractéristiques.
   - **e.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, mà*ª*me incomplète, ou d'initiative, mà*ª*me non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On note z_n la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} z_n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

1. Calculer les affixes des points A_1, A_2 et A_3. Placer ces points dans le plan muni du repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

2. **a.** Montrer que le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe s, dont on définira le rapport, l'angle et le centre Ω, d'affixe ω.

b. Démontrer que le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle.

3. **a.** établir que, pour tout entier naturel n, on a : $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$.

b. À partir de quelle valeur de n les points A_n sont-ils situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon $0{,}001$?

4. Pour tout entier naturel n, on note a_n la longueur $A_n A_{n+1}$ et L_n la somme $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonale $A_0 A_1 \cdots A_n A_{n+1}$.

Déterminer la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, màªme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés.

Baccalauréat S Polynésie juin 2012

EXERCICE 1 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

On considère les points B (100 ; 100) et C$\left(50\,;\,\dfrac{50}{\sqrt{\text{e}}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ , est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = x\text{e}^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ.

1. **a.** Montrer que le couple $(a\,;\,b)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

   b. En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = x\text{e}^{0,01x-1}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. **a.** Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{100}{\text{e}} \times 0,01x\text{e}^{0,01x}$

   b. En déduire la limite de f en $-\infty$.
4. Étudier les variations de la fonction f.On donnera le tableau de variations complet.
5. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).
6. **a.** Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^{100} f(t)\,\text{d}t$.

   b. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ.
   Calculer A.

EXERCICE 2 5 points

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2+2\text{i}$, $b = -3-6$
$texti$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée en annexe. Elle peut servir à émettre des conjectures, à vérifier des résultats.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. **a.** Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

   b. En déduire l'affixe du point A' image de A par r.

   c. Vérifier que l'affixe s du point S milieu de [AA'] est $s = -\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}$.

   d. Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, Q le milieu de [CC'], B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et P le milieu de [BB'].

   On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$ et $p = 2-5\text{i}$.

a. Démontrer que $\dfrac{s-q}{p-a} = -\text{i}$.

b. En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

```
Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N − 1

Affecter à U la valeur 3U − 2k + 3
Fin pour

Sortie
Afficher U
```

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

b. Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

EXERCICE 4 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12+0,004x$.
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'unlosange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.
Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(13\ ;\ 3)$ est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.
On rappelle le petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p, alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p que l'on note $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

1. Soit x un entier naturel.
   Démontrer que si $x \equiv a\ [7]$ et $x \equiv a\ [19]$, alors $x \equiv a\ [133]$.
2. **a.** On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   Démontrer que $a^6 \equiv 1\ [7]$ puis que $a^{108} \equiv 1\ [7]$.
   En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

   b. On suppose que a est un multiple de 7.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [7]$.

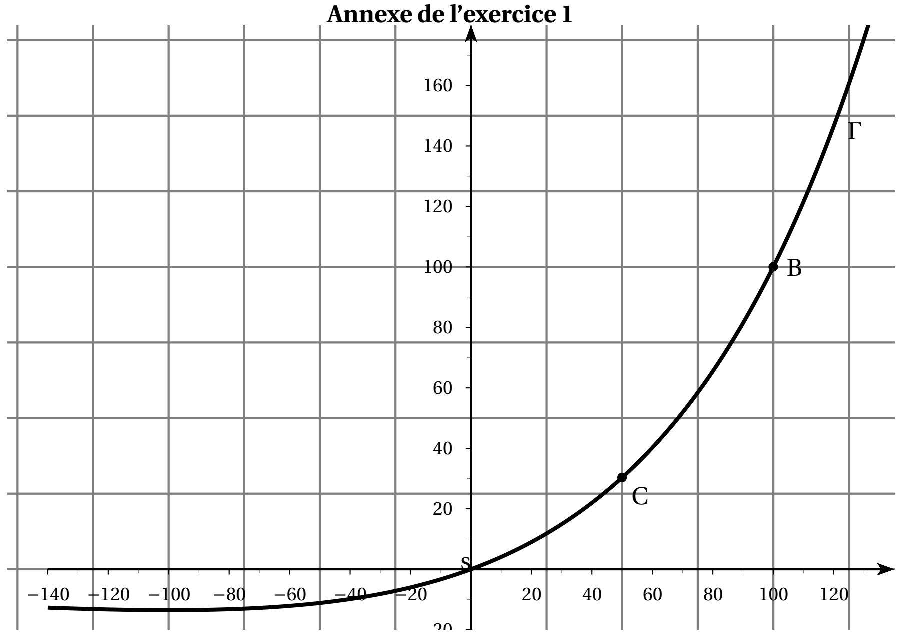
   c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [19]$.
   Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a\ [133]$.

Partie C

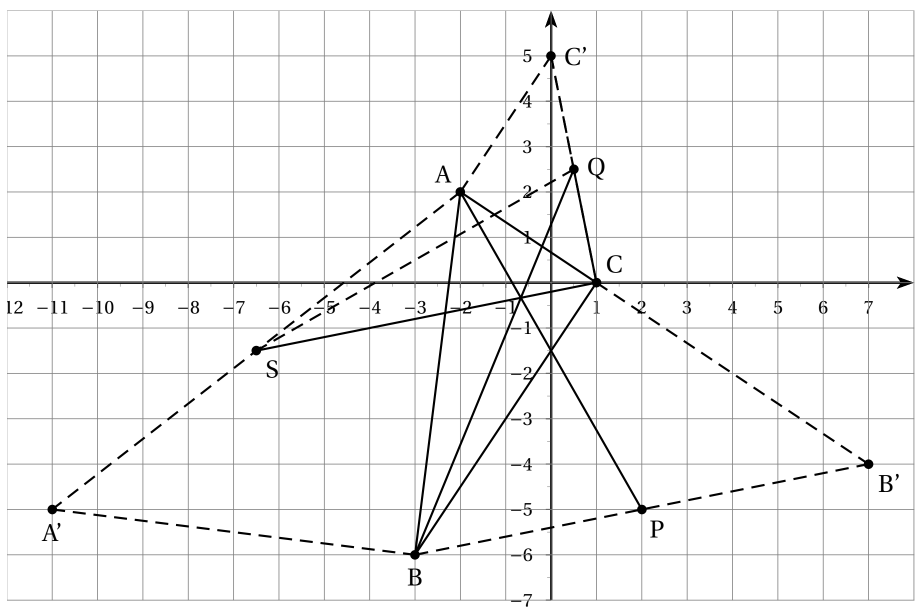
On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r\ [133]$ avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1\ [133]$ avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a\ [133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des deux entiers suivants : 128 59.
   Décoder ce message.

Annexe de l'exercice 1



Annexe de l'exercice 2



∽ Baccalauréat S Antilles-Guyane ∾
19 juin 2012

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties B et C sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2\mathrm{e}^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite Δ, la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.
2. On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que I $= \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1+2\text{i} \quad ; \quad b = -2-\text{i} \quad ; \quad c = -3+\text{i}.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.

2. Calculer $\dfrac{b}{a}$, en déduire la nature du triangle OAB.

3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z+1-2\text{i}}{z+2+\text{i}}$$

a. Calculer l'affixe c' du point C$'$, image de C par f et placer le point C$'$ sur la figure.

b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

c. Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*
On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On note L le milieu de [JK].
Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{array}\right.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.
On choisit, au hasard, un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.
Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ? 3.

3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3}.

4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les évènements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à $0,02$ et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à $0,069$.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?

5. On considère l'algorithme :

```
A et C sont des entiers naturels,
C prend la valeur 0
Répéter 9 fois
        A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7.
                Si A > 5 alors C prend la valeur de C + 1
                Fin Si
Fin répéter
Afficher C.
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.
Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les quatre questions sont indépendantes.

1. **a.** Vérifier que le couple $(4\,;\,6)$ est une solution de l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad 11x - 5y = 14.$$

   b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$2^{3n} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 7).$$

   b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i}.$$

4.

5. On considère l'algorithme suivant où $\mathrm{Ent}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}$.

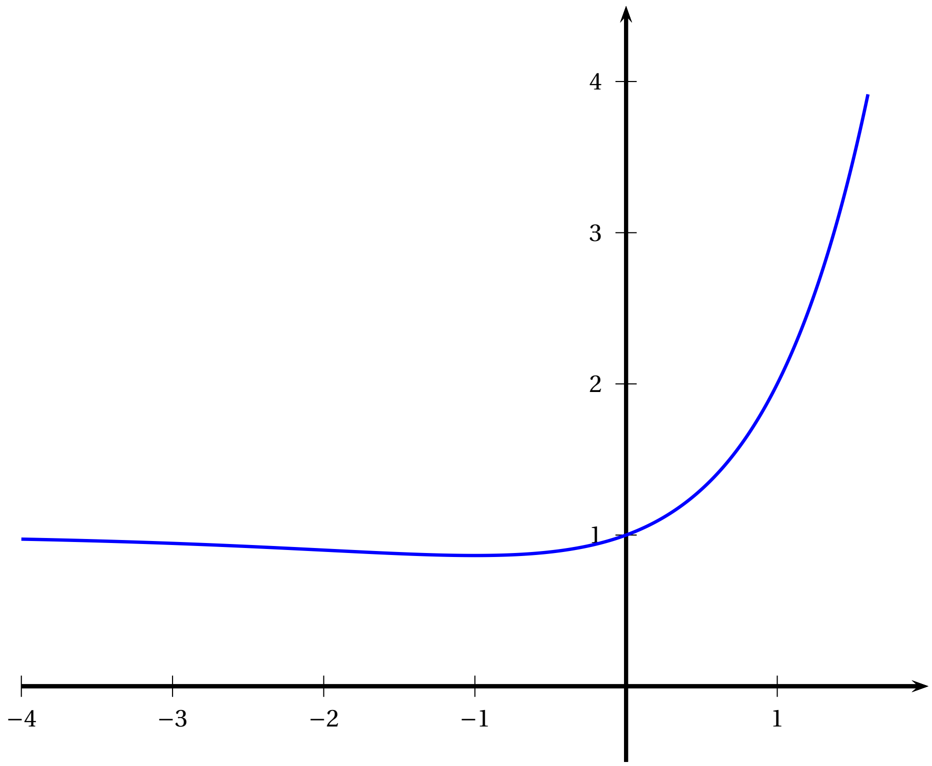
A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que N $\leqslant \sqrt{\mathrm{A}}$
    Si $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\right) = 0$ alors Afficher N et $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}$
    Fin si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que.

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?

ANNEXE 1
Exercice 1
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de f



Baccalauréat S Asie 20 juin 2012

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 *point.*

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite $\mathcal{D}$ dont on donne une représentation paramétrique, et le plan $\mathcal{P}$ dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{l c r} x & = & 1-2t\\ y & = & t\\ z & = & -5-4t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}: \quad 3x+2y-z-5=0.$$

   Affirmation 1 : la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $4x-y-z+3=0$.

   Affirmation 2 : la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x)=\dfrac{3}{1+\text{e}^{-2x}}$.

   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

   Affirmation 3 : la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel x, on pose $F(x)=\displaystyle\int_1^x (2-t)\text{e}^{-t}\,\text{d}t$.

   Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^{\text{e}} t^2 \ln t\,\text{d}t$.

   Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale I est : $\dfrac{2\text{e}^3+1}{9}$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

On considère le point A, d'affixe $z_{\text{A}}=-\sqrt{3}+\text{i}$, le point A_1 d'affixe $z_{\text{A}_1}=\overline{z_{\text{A}}}$ où $\overline{z_{\text{A}}}$ désigne le conjugué de z_{A}.
On note enfin B image du point A_1 par la rotation r et z_{B} l'affixe du point 8.

1.
   a. Écrire le nombre complexe z_{A} sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

   b. Vérifier que $z_{\text{B}}=2\text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_{B} sous forme algébrique.
   Placer alors le point B dans le même repère.

2. On considère le vecteur unitaire $\overrightarrow{w}$, tel que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = \dfrac{\pi}{12}$, et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

- **a.** Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
- **b.** Tracer la droite Δ, puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.
  En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ et B$'$ l'image de B_1 par la rotation r. Démontrer que $\text{B}' = \text{A}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}(1+\text{i})$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.
Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_{\text{B}} = -\sqrt{3} + \text{i}.$$

1. **a.** Ecrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
- **b.** Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.

2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f de centre 0 qui transforme le point A en B.
- **b.** Préciser les éléments caractéristiques dc la similitude f.

Partie B. Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$, où f désigne la similitude définie dans la partie A et s la réflexion d'axe $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}\right)$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On désigne par M' l'image du point M par la transformation g.
On note z et z' les affixes respectives des points M et M', et $\overline{z}$ celle du conjugué de z.

- **a.** Démontrer l'égalité : $z' = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}\overline{z}$.
- **b.** On pose $\text{C} = g(\text{A})$ et $\text{D} = g(\text{C})$. Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.
- **c.** Quelle est la nature du triangle OAC ?
- **d.** Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OA}}$ et $\overrightarrow{\text{OD}}$ sont colinéaires.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.

Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. **a.** Justifier l'égalité : $p\left(Y_k = 5\right) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

2. On note $\mathrm{E}(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k

On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}(Y_k)$ est strictement positive.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictemenl positif non nul b $(b > a)$ Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et
$v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.

3. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

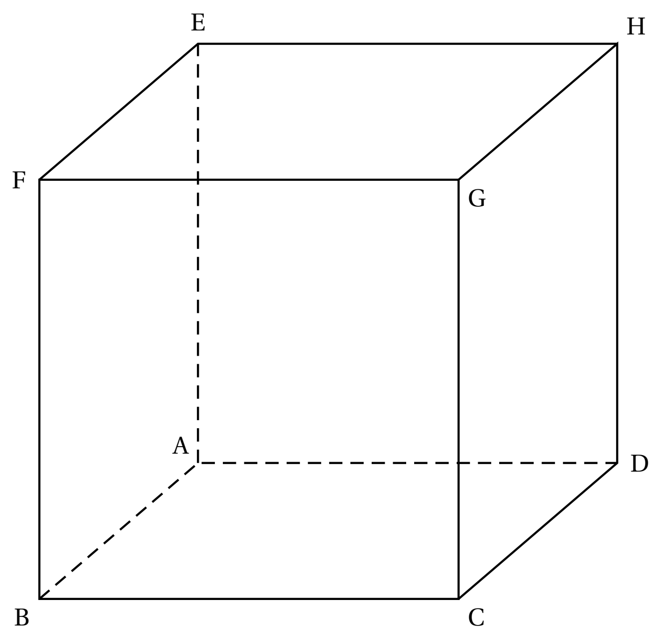
b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

∽ Baccalauréat S Centres étrangers 13 juin 2012 ∾

EXERCICE 1 — 4 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
On considère les points $\mathrm{I}\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $\mathrm{K}\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $\mathrm{L}(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. , \ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

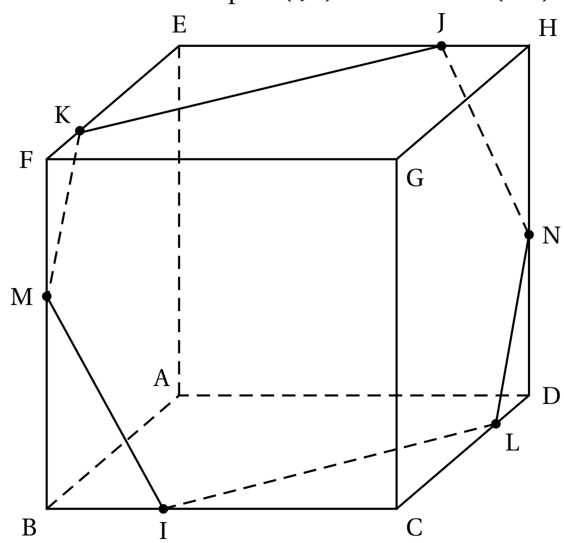
Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

   a. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(8\,;9\,;5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

   b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x+9y+5z-11=0$.

   c. En déduire les coordonnées des points M et N

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Soit g la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

   Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

   b. En déduire la valeur de I_1.

   c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{n+1}{2}I_n.$$

   d. Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{1}{2}$
	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) ontient-on en sortie de cet algorithme ?

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

   b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

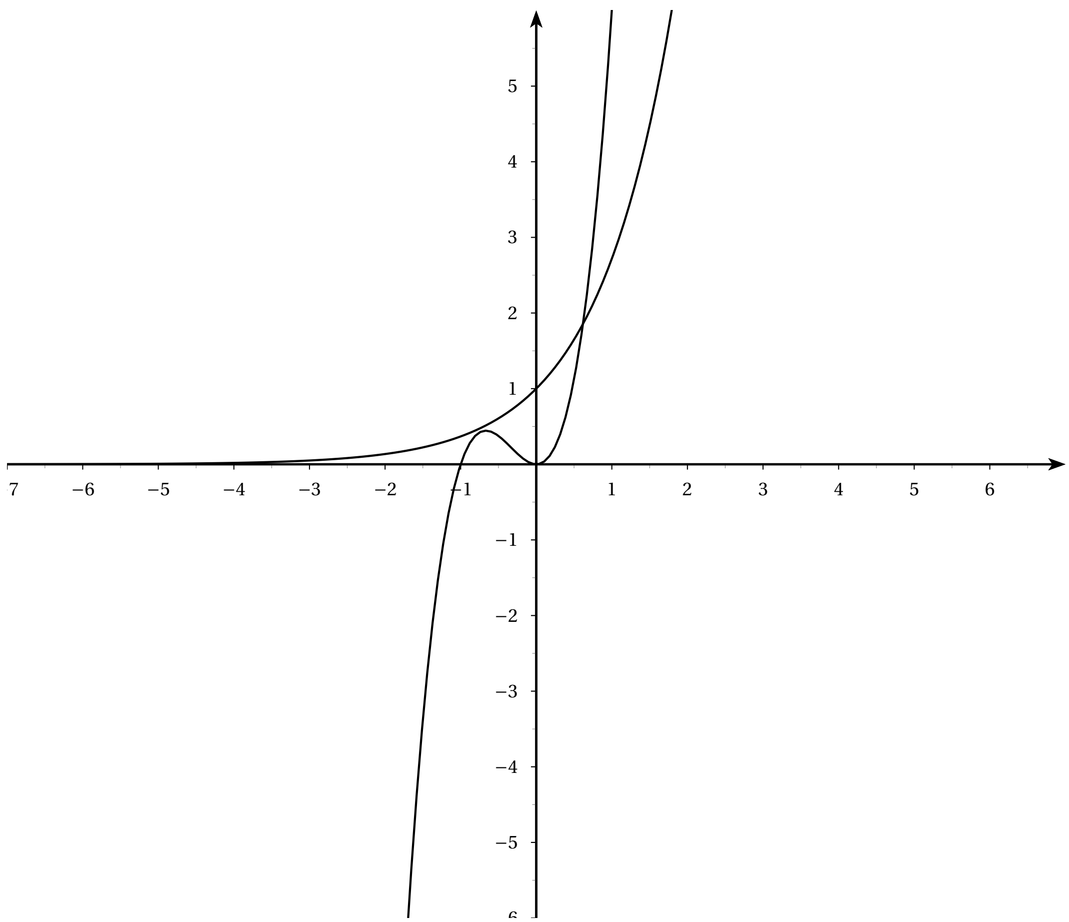
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la valeur de ℓ.

EXERCICE 3 — 6 points

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

b. En déduire que l'équation (E)n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\ -1]$.

c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}.$$

b. Déterminer les variations de la fonction h.

c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

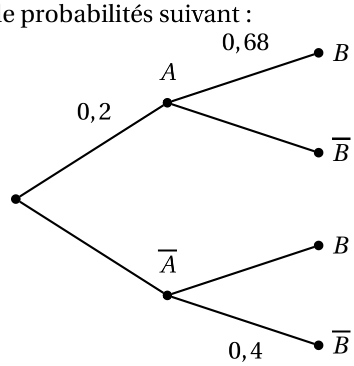
d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'arbre de probabilités suivant :



Affirmation : la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à 0,32.

2. On considère une urne contenant n boules rouges et trois boules noires, où n désigne un entier naturel non nul. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément deux boules dans l'urne.

Affirmation : il existe une valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $\frac{9}{22}$.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère la transformation t d'écriture complexe

$$z' = -\text{i}z + 5 + \text{i}.$$

Affirmation : la transformation t est la rotation de centre A d'affixe $3-2\text{i}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - z\overline{z} - 1 = 0.$$

Affirmation : l'équation (E) admet au moins une solution.

5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -1$, $b = \text{i}$ et $c = \sqrt{3} + \text{i}(1 - \sqrt{3})$.

Affirmation : le triangle ABC possède un angle dont une mesure est égale à 60°.

EXERCICE 4 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Toute trace de recherche sera valorisée.

1. On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs.
Affirmation : les solutions de l'équation (E) sont les couples $(9 + 2k\ ;\ 13 + 3k)$, avec k appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

2. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :

$$a = 3n + 1 \text{ et } b = 2n + 3.$$

Affirmation : le PGCD de a et b est égal à 7 si et seulement si n est congru à 2 modulo 7.

3. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :

$$a = 2n^2 + 7n + 21 \text{ et } b = 2n + 2.$$

Affirmation : pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et $n + 17$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère le point A d'affixe $3 + 4\text{i}$.
On note s la similitude directe s de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
Affirmation : la similitude directe réciproque s^{-1} a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{1 - \text{i}}{2}z + \frac{-1 + 7\text{i}}{2}.$$

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 + 2\text{i}$, $b = 4 - \text{i}$, $c = 1 - 2\sqrt{3} + \text{i}(3 + \sqrt{3})$ et $d = 4 + \sqrt{3} + 4\text{i}\sqrt{3}$.

Affirmation : la similitude directe qui transforme A en C et B en D a pour angle $\dfrac{\pi}{3}$.

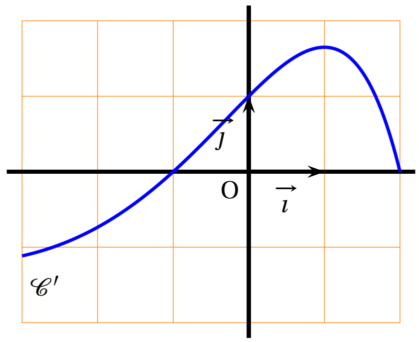
∽ Baccalauréat S Métropole 21 juin 2012 ∾

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$.

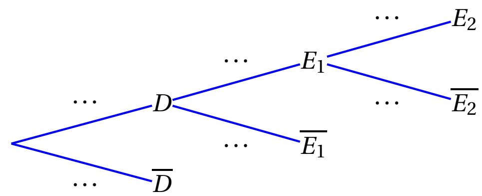
Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   - D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   - E_2 : « Le candidat est recruté ».

   a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	| Affecter à u la valeur $u + \dfrac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.
Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Soit k un entier strictement positif.
Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.
En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1).
b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b. Calculer les affixes des points $\text{A}' = f(\text{A}), \text{B}' = f(\text{B})$ et $\text{C}' = f(\text{C})$ et placer les points A', B'et C' sur la figure.

c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z+1$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathcal{D}_1$, image de la droite $\mathcal{D}$ par g.

c. Démontrer que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1| = |z|$.

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Justifier que $h(\text{A}_1) = \text{A}', h(\text{B}_1) = \text{B}'$ et $h(\text{C}_1) = \text{C}'$.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \iff |z-1| = |z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

On admet que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.

4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_\text{A} = -1+\text{i}, \quad z_\text{B} = 2\text{i} \quad \text{et} \quad z_\text{C} = 1+3\text{i}.$$

et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x+2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.

Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite $\mathcal{D}$.

2. Résoudre l'équation $(1+\text{i})z+3-\text{i} = 0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1+2\text{i}$, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{(1+\text{i})z+3-\text{i}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1+\text{i})z+3-\text{i}$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.

c. Déterminer l'image $\mathcal{D}_1$ de la droite $\mathcal{D}$ par la transformation g et la tracer sur la figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Déterminer les affixes des points $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(A_1)$ et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \iff |z-2|=|z|.$$

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle $\mathcal{C}$ qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathcal{D}_1$.

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Antilles–Guyane
13 septembre 2012

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

$\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.

On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{l c r}x&=&t\\y&=&-t\\z&=&2t\end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par l'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.

Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre B$(1~;~-1~;~0)$ et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.

Il est attribué pour chaque question $0,5$ *point si la réponse est exacte et* $0,5$ *point si la justification est correcte.*

1. La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont :
   a. parallèles ;
   b. perpendiculaires ;
   c. non parallèles et non perpendiculaires.
2. Soit $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}'$ admet pour équation cartésienne :
   a. $-2y + z + 2 = 0$;
   b. $2x - z = 0$;
   c. $x - y - z = 0$.
3. La droite Δ, intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan d'équation $2x - z = 0$, admet pour représentation paramétrique :
   a. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&t\\y&=&-3t+1\\z&=&2t\end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$;
   b. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&t\\y&=&-t\\z&=&2t\end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$;
   c. $\left\{\begin{array}{l c l}x&=&t\\y&=&-5t+1\\z&=&2t\end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}..$
4. L'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :
   a. un point ;
   b. l'ensemble vide ;
   c. un cercle.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = \sqrt{3} + \text{i} \quad ; \quad z_{\text{B}} = -1 + \text{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_{\text{C}} = -1 - 3\text{i}.$$

On note D l'image du point C par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
On note E l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{OC}}$.

1. **a.** Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.
   b. Sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 2 cm, placer les points A et B et C.
   c. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. **a.** Construire les points D et E. Calculer leurs affixes z_{D} et z_{E}.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{OE}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ sont orthogonaux et que OE = AD.
3. Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent dans un cas plus général. Il est inutile de refaire une figure.

   Soient A, B, C, D et E les points- d'affixes respectives non nulles z_{A}, z_{B}, z_{C}, z_{D} et z_{E} tels que
   le triangle OAB est rectangle isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{\text{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
   le triangle OCD est rectangle isocèle en O avec $\left(\overrightarrow{\text{OC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{OD}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$;
   Le quadrilatère OBEC est un parallélogramme.

   a. Justifier les égalités suivantes :

   $$z_{\text{B}} = \text{i}z_{\text{A}} \quad ; \quad z_{\text{D}} = \text{i}z_{\text{C}} \quad ; \quad z_{\text{E}} = \text{i}z_{\text{A}} + z_{\text{C}}$$

   b. Montrer que

   $$\frac{z_{\text{D}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}} = \text{i}.$$

   c. Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\text{D}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}}}\right)$ puis conclure.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On tracera la figure sur une feuille de papier millimétré, en prenant pour unité graphique 1 cm.

Partie A : tracé d'une figure

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -2 - 4\text{i}$; $z_{\text{B}} = -6\text{i}$; $z_{\text{C}} = 3 - 3\text{i}$.

1. Placer le point D tel que le triangle ABD est isocèle rectangle en D, avec $\left(\overrightarrow{\text{DA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{DB}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Construire le point E tel que le triangle OEA est isocèle rectangle en E avec $\left(\overrightarrow{\text{EA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{EO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Vérifier que l'affixe du point D est $z_{\text{D}} = -4\text{i}$.

Le but de l'exercice est de montrer de deux manières que les droites (ED) et (BC) sont perpendiculaires et que les distances ED et BC sont égales.

Partie B : première méthode

1. Soit g la similitude directe de centre A qui transforme B en D.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude g.

b. En déduire que l'écriture complexe de g est

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) z - 3 - \mathrm{i}.$$

c. Justifier que le point E est l'image du point O par la similitude g.

d. En déduire l'affixe du point E.

2. Calculer le module et un argument de $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{D}}}$ et conclure pour le problème posé.

Partie C : deuxième méthode

1. On considère la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Quelle est l'image du point O par cette rotation ? Justifier la réponse.
En déduire la nature du triangle OBC.

2. Soit f la similitude directe de centre B, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Soit h la similitude directe de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

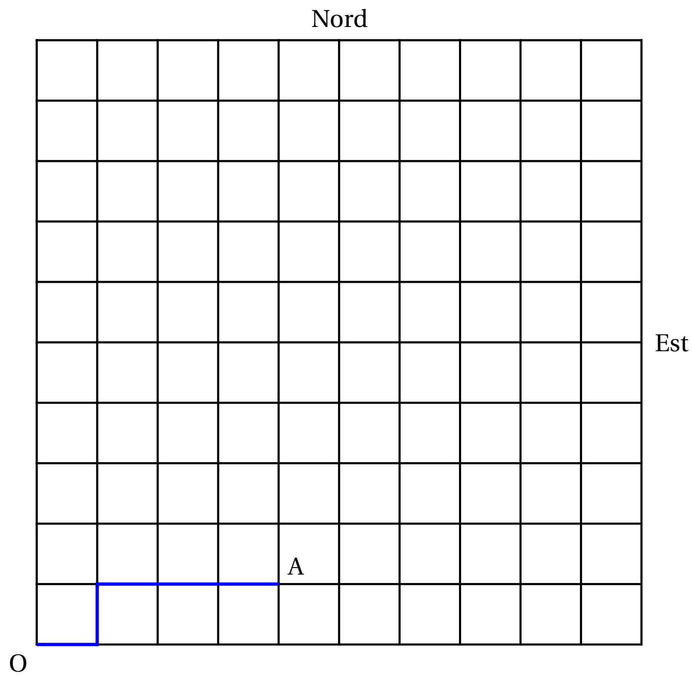
a. Donner l'angle et le rapport de la similitude $h \circ f$.

b. Quelle est l'image de la droite (BC) par $h \circ f$? Justifier.

c. Conclure pour le problème posé.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les rues d'une ville nouvelle sont structurées de telle sorte que les pâtés de maisons sont des carrés superposables et les rues sont toutes parallèles ou perpendiculaires.
On identifie le plan de la ville au quadrillage d'un carré de 10 unités sur 10 dans lequel on se repère avec des points à coordonnées entières qui correspondent aux carrefours :



Le point O a pour coordonnées (0 ; 0), le point A a pour coordonnées (4 ; 1).
On s'intéresse aux chemins partant de O et arrivant à un autre point M de coordonnées $(p\ ;\ q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.

À chaque intersection, on ne peut aller que vers le nord (N) ou vers l'est (E).

Dans tout l'exercice, on décrit un chemin à l'aide d'un mot composé successivement des lettres N ou E qui indiquent dans l'ordre la direction à suivre à chaque intersection.
On appelle *longueur* d'un chemin le nombre de lettres employées pour le décrire.
Par exemple :
Pour se rendre en A, on peut suivre par exemple les chemins NEEEE ou ENEEE (marqué en gras sur la figure) ; ces deux chemins ont une longueur égale à 5.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A - Dénombrement

1. Donner la liste de tous les chemins permettant de se rendre en A.
2. Soit M un point de coordonnées $(p;q)$ où p et q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant 10$ et $q \leqslant 10$.
   Exprimer, en fonction de p et q, la longueur des chemins qui permettent d'arriver en M.
3. Montrer qu'il y a $\binom{p+q}{p}$ chemins différents qui permettent d'arriver en M.
4. Dénombrer les chemins pour arriver au point C de coordonnées (7 ; 5).
5. Dénombrer les chemins pour arriver en C en passant par A.

Partie B - Étude d'une variable aléatoire

Tous les chemins considérés dans la suite de l'exercice vérifient les deux propriétés suivantes :
ils sont de longueur 5 ;
un promeneur part de O et à chaque intersection la probabilité qu'il aille vers le Nord est de $\frac{2}{3}$ (et donc de $\frac{1}{3}$ vers l'Est), indépendamment de son choix précédent.
On appelle X la variable aléatoire qui à tout chemin suivi par le promeneur associe le nombre de fois où il va vers le Nord.

1. Énumérer, en donnant la liste de leurs coordonnées, tous les points sur lesquels peut aboutir un chemin.
2. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Calculer la probabilité que le promeneur arrive en A.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire que si $x \geqslant \text{e}$ alors $f(x) \geqslant \text{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcr} u_0 & = & 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.

   Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \text{e}$.

   b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   d. Déterminer sa limite ℓ.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X/ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

   À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

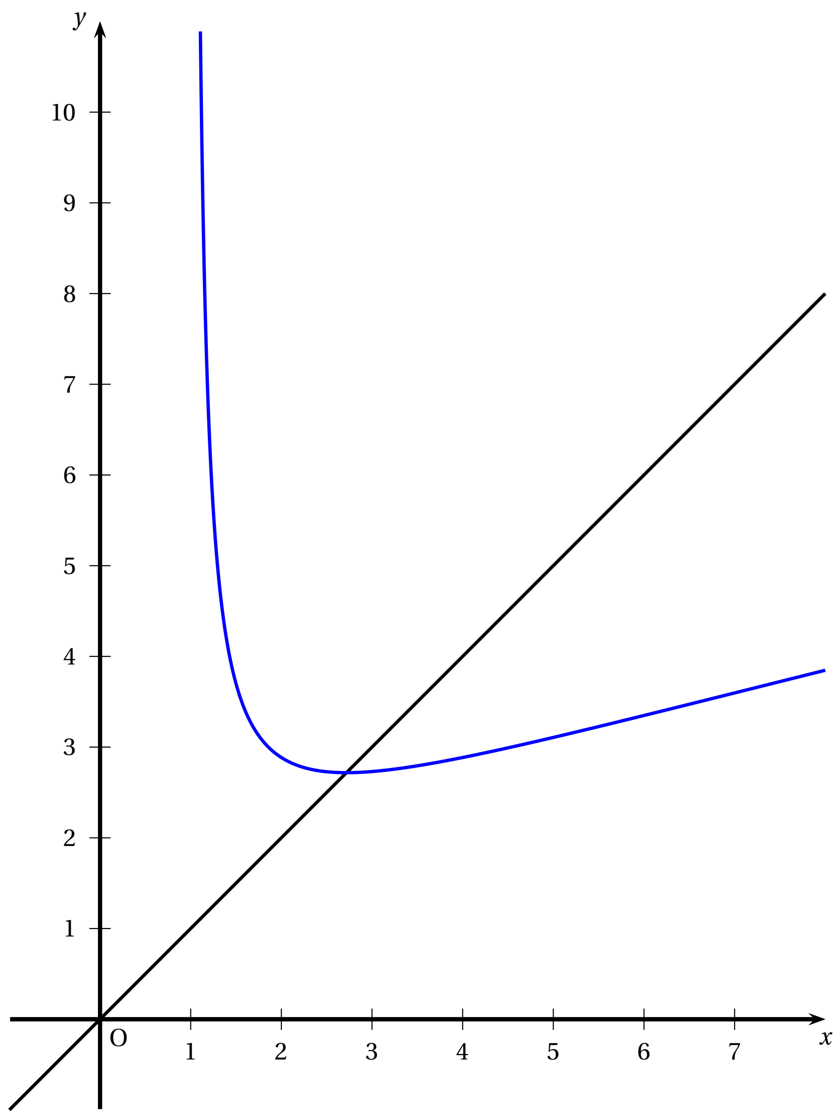
n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5

ANNEXE

Exercice 4

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie



∽ Baccalauréat S Métropole 13 septembre 2012 ∾

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.

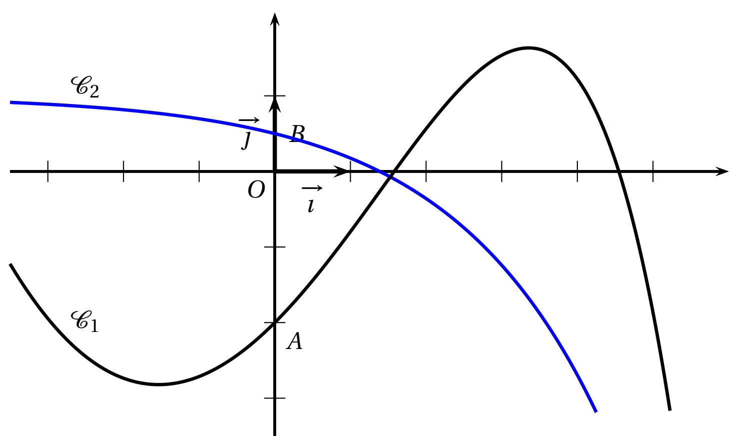
x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$			b		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on a tracé deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1$.

Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\dfrac{1}{2}$ respectivement.

L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



a. Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f'. Justifier la réponse.

b. À l'aide des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.

3. Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x,

$$f(x) - 2f'(x) = x.$$

a. Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x, $g(x) - 2g'(x) = x$.

b. Démontrer que la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$.

c. Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

d. En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes*

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

On prélève au hasard une boule de l'urne.

Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.

Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la boule tirée.

a. Quelle est la probabilité que les boules tirées soient rouges ?

b. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.

Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.

On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.

La variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages suit la loi binomiale de paramètres 4 et p.

a. Donner l'expression de p en fonction de n.

b. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\dfrac{4}{n+4}\right)^4$.

c. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à 0,999 9 ?

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 3 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \quad (\star)$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right).$$

Démontrer que la fonction f admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

2. **a.** Soit n un entier naturel quelconque.

Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation $(\star)$ que la limite ℓ de cette suite est telle que $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right)$.

Déterminer ℓ.

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par :

$$d_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2.$$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

b. Voici un algorithme :

Variables :	n et p sont des entiers naturels d est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Initialisations :	Affecter à d la valeur 1. Affecter à n la valeur 0
Traitement :	Tant que $d > 10^{-p}$. | Affecter à d la valeur $0,5d^2$ | Affecter à n la valeur $n+1$.
Sortie :	Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.
Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

EXERCICE 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1 + 2\text{i}| = |z + 3 - 4\text{i}|$ est une droite passant par le point H d'affixe $5 + 5\text{i}$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2 - \text{i}$, $1 + \text{i}$ et $3 - 2\text{i}$.
L'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport -2 est le point C.

3. Soit f la transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \text{i})z.$$

L'image d'une droite d du plan par la transformation f est une droite qui est perpendiculaire à la droite d.

Pour les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

4. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y - 7 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2 - t\\ y &=& 1 + 3t\\ z &=& t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Soient $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+3y-4z+1=0$ et A le point de coordonnées $(1\,;\,4\,;\,-1)$.
   La sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon 4 est sécante au plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

1. Soit $(E)\quad 5x+6y=3$, où x et y sont des entiers relatifs.
   Les seuls couples qui sont solutions de l'équation (E) sont les couples $(18k+3,\ -15k-2)$ où k est un entier relatif.
2. Le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7 est égal à 6.

   Pour les questions suivantes, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   On note A le point d'affixe $2-\text{i}$ et B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   Le point C est le milieu du segment [AB].

3. Le point C est l'image du point O par la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
4. Soit f la similitude directe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=(-1+\text{i})z$.
   La transformation composée $f\circ f$ transforme la droite (AB) en une droite qui est perpendiculaire à (AB).
5. La transformation complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=(1-\text{i})z+3-\text{i}$, est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud
13 novembre 2012

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **Restitution organisée de connaissance**

   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$.

   On suppose connus les résultats suivants :

   - La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée
   - $\text{e}^0 = 1$
   - Pour tout réel x, on a $\text{e}^x > x$
   - Soit deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A~;~+\infty[$, où A est un réel positif.
     Si pour tout x de $[A~;~+\infty[$, $v(x) \leqslant w(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = +\infty$.

   a. Soit φ la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $\varphi(x) = \text{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

   Montrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 1$.

   b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x\text{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   a. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0~;~+\infty[$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t \geqslant 0$).

On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\text{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. On considère l'équation différentielle

   $$\left(E'\right) : \qquad y' + \frac{1}{2}y = 0$$

   a. Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par l'équation $u(t) = at\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation (E).

   b. Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction

   $h = v - u$ est solution de l'équation $\left(E'\right)$.

c. Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.

d. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.

Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie cette condition initiale est la fonction f étudiée dans la **partie A**.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n.
Traitement	Tant que $f(n) > 0,1$
	incrémenter la variable n de 1.
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n.

où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

a. À l'aide de la question 2. a. de la **partie A**, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.

b. Quelle est la valeur n_0 de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?

c. L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. À quelle question cet algorithme permet-il de répondre ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = \text{i}, \quad z_{\text{B}} = 2\text{i}, \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = 1.$$

On considère la transformation f qui à tout point M du plan d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2\text{i}z}{z - \text{i}}.$$

On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par la transformation f.

2. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points B′ et C′, images respectives des points B et C par f.

3. **a.** Montrer que, pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' vérifie l'égalité

$z' - 2\text{i} = \dfrac{-2}{z - \text{i}}$.

b. En déduire que si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors son image M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

c. Exprimer une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{B}M'}\right)$ en fonction d'une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

d. On considère le point D d'affixe $z_{\text{D}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$. Vérifier que D appartient au cercle Γ.

Construire, à la règle et au compas, le point D et son image D′ par f.

4. On note G l'isobarycentre des points O, B et C.

a. Déterminer l'affixe du point G.

b. On admet que l'image G' du point G a pour affixe $z_{G'} = -3 - \text{i}$. Le point G' est-il l'isobarycentre des points O, B′ et C′ ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB $= L$ et AD $= 1$ $(L > 1)$.
Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.
On suppose qu'il existe une similitude directe f de rapport k telle que :

$$f(\text{A}) = \text{B}, \quad f(\text{B}) = \text{C}, \quad f(\text{C}) = \text{E}.$$

Partie A

1. En utilisant des rapports de longueurs, montrer que $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. **a.** Déterminer l'angle et le rapport de la similitude f.
   On appelle Ω le centre de la similitude f.

   b. Déterminer l'image par la composée $f \circ f$ des points Ω, A et B.

   c. Quelle est la nature de la transformation $f \circ f$? Préciser ses éléments caractéristiques.

   d. En déduire que Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).
3. **a.** Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude f.

   b. En déduire une construction du point E′, image du point E par la similitude f.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\, \overrightarrow{\text{AF}},\, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.
On appelle z l'affixe du point M, et z' l'affixe du point M', image du point M par f.

1. Montrer que $z' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\text{i}z + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.
2. Déterminer l'image du point D par f.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.
Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.
Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.
La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à $0,7$.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées
– si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,8$;
– si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut $0,7$.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)

b. Calculer l'espérance mathématique $\text{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = 9x_n - 7$.

Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Déterminer la nature de la suite (u_n).

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$ et soit S le point de coordonnées $(1~;~3~;~5)$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie. ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Les points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.

2. La droite δ_1 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & 1+t\\ y & = & 5-4t\\ z & = & 2-2t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

3. La droite δ_2 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l c l}x & = & -t\\ y & = & 7+4t\\ z & = & 7+2t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

est la droite parallèle à la droite δ_1 passant par le point S.

4. Le projeté orthogonal du point S sur le plan $\mathscr{P}$ a pour coordonnées

$$\left(-\frac{6}{7}~;~\frac{55}{14}~;~\frac{31}{14}\right).$$

5. Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère de centre S et de rayon 3.

Durée : 4 heures

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. **a.** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0~;~+\infty[$.

   b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a
   $$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

   d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

   e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On notera α cette solution.

   b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14~;~15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{l c l}u_0 & = & 4\\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n + 3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0\end{array}\right.$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. **a.** Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

   b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

2. **a.** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

   b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

   d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

   e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Tous les résultats seront donnés sous la forme de fractions.

On dispose d'une urne U contenant trois boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.

Partie A

On considère l'expérience suivante : on tire successivement trois fois de suite une boule de l'urne U, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
On appelle X le nombre de fois où on a obtenu une boule rouge.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement une fois une boule rouge.
3. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Partie B

On procède maintenant à une nouvelle expérience :
• on tire une boule de l'urne U. Si elle est rouge on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule à nouveau ;
• si cette deuxième boule est rouge, on s'arrête, sinon on la remet dans l'urne et on tire une boule pour la troisième fois.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
2. On appelle Y le nombre de boules rouges obtenues lors d'une expérience. La variable aléatoire Y prend donc la valeur 1 si la dernière boule est rouge et 0 sinon.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et son espérance mathématique.
3. On appelle N le nombre de tirages effectués lors d'une expérience.
   Déterminer la loi de probabilité de N et son espérance mathématique.
4. On appelle *proportion moyenne de boules rouges* le rapport de l'espérance du nombre de boules rouges obtenues sur l'espérance du nombre de tirages.
   Montrer que la proportion moyenne de boules rouges dans l'expérience est la même que la proportion de boules rouges dans l'urne.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant :

> Soit a un réel.
> Soit (E_0) l'équation différentielle de fonction inconnue y de variable réelle, dérivable de fonction dérivée y' :
> $$y' = ay \quad (E_0)$$
> Les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax}$, où C est une constante réelle.

On considère a et b deux réels, avec a non nul.
Démontrer que les solutions de l'équation différentielle de fonction inconnue y de variable réelle, dérivable de fonction dérivée y' :

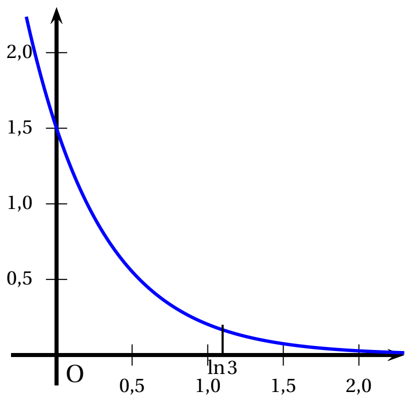
$$y' = ay + b \quad (E)$$

sont les fonctions de la forme $x \longmapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Partie B

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse :

1. **Affirmation 1 :** si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' + 3y = 6$ alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$.
2. **Affirmation 2 :** si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' = y$ alors pour tous réels α et β, $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$.
3. La courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{3}{2}$ (*voir figure ci-contre*).
Affirmation 3 : l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations respectives
$x = 0$ et $x = \ln(3)$, est $\dfrac{2}{3}$



EXERCICE 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on appelle A le point d'affixe 1 et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.
La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré avec 4 cm pour unité graphique.

Partie A

On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z + 2 = 0,$$

où z est un nombre complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On appelle M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{2z-1}{2z-2}.$$

1. Placer le point A et tracer le cercle $\mathscr{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a
$$\left(z'-1\right)(z-1) = \frac{1}{2}.$$
3. Montrer que pour tout point M distinct de A on a :
   - $\text{A}M \times \text{A}M' = \frac{1}{2}$;
   - $M' \neq \text{A}$;
   - $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) + \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M'}\right) = 0 + 2k\pi$, où k est un entier relatif
4. On considère le point P d'affixe $z_{\text{P}} = 1 + \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.
5. En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P$'$, image de P par f, et réaliser cette construction.
6. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x = \frac{3}{4}$. Soit M' son image par f.
   a. Montrer que le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ de centre O de rayon 1.
   b. Tout point de $\mathscr{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

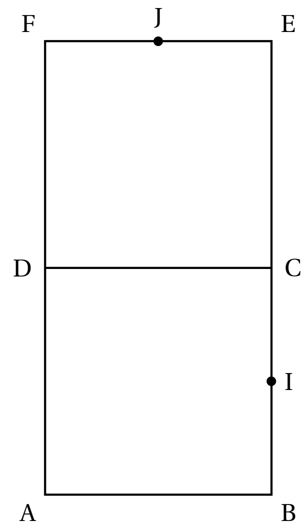
EXERCICE 4 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On considère deux carrés directs ABCD et DCEF de côté 1. Le point I est milieu de [BC] et le point J est milieu de [EF] (voir figure ci-dessous).

1. On considère la rotation r de centre D qui transforme A en C. Justifier que $r(\text{I}) = \text{J}$.
2. Justifier que r est l'unique similitude directe qui transforme A en C et I en J.
3. On appelle s la similitude directe qui transforme A en I et C en J.
   On se place dans le repère $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right)$.
   a. Donner les affixes des points A, C, I et J.
   b. Montrer que l'écriture complexe de s est
   $$z' = \left(\frac{1}{2} + \text{i}\right)z + 1 + \frac{1}{2}\text{i}.$$
   c. Montrer que le point D est le centre de s.



Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ on considère trois points M, N, P distincts entre eux et distincts du point O. On appelle m, n, p leurs affixes respectives.
On définit la similitude directe s_1 qui transforme O en M et N en P et la similitude directe s_2 qui transforme O en N et M en P.

1. Montrer que l'écriture complexe de s_1 est

$$z' = \frac{p-m}{n}z + m.$$

On admet que l'écriture complexe de s_2 est $z' = \frac{p-n}{m}z + n$.

2. **a.** Montrer que si OMPN est un parallélogramme alors s_1 et s_2 sont des translations.

b. On suppose que OMPN n'est pas un parallélogramme. Justifier que s_1 et s_2 ont chacune un centre, et montrer que ces deux points sont confondus.

Annexe 1
(Exercice 1)
Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie